Correction Plan de Travail :
Nombres complexes, point de vue algébrique

Corrigé exercice 18 :

1. $\mathrm{Re}(a) = 3$ et $\mathrm{Im}(a) = 2$.
2. $b = -2\mathrm{i} + 4 = 4 - 2\mathrm{i}$ donc $\mathrm{Re}(b) = 4$ et $\mathrm{Im}(b) = -2$.
3. $c = \dfrac{3+5\mathrm{i}}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$ donc $\mathrm{Re}(c) = \dfrac{3}{2}$ et $\mathrm{Im}(c) = \dfrac{5}{2}$.
4. $d = \dfrac{2\mathrm{i}-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{i} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ donc $\mathrm{Re}(d) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\mathrm{Im}(d) = \sqrt{2}$.
5. $e = 4\mathrm{i}$ donc $\mathrm{Re}(e) = 0$ et $\mathrm{Im}(e) = 4$.
6. $f = 0$ donc $\mathrm{Re}(f) = 0 = \mathrm{Im}(f)$.
7. $g = \mathrm{i}^2 = -1$ donc $\mathrm{Re}(g) = -1$ et $\mathrm{Im}(g) = 0$.
8. $h = \mathrm{i}^7 = \mathrm{i}^4 \times \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ donc $\mathrm{Re}(h) = 0$ et $\mathrm{Im}(h) = -1$.

Corrigé exercice 21 :

1. $\overline{A} = \overline{3+2\mathrm{i}} = 3 - 2\mathrm{i}$
2. $\overline{B} = \bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$
3. $\overline{C} = \overline{3\mathrm{i}-4} = \overline{-4+3\mathrm{i}} = -4 - 3\mathrm{i}$
4. $\overline{D} = \overline{-5-6\mathrm{i}} = -5 + 6\mathrm{i}$

Corrigé exercice 23 :

On a $z_2 = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\overline{1+\mathrm{i}}}{\overline{1-\mathrm{i}}} = \overline{\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)} = \overline{z_1}$ donc $z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\mathrm{Re}(z_1) \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 28 :

1. $a = (2+\mathrm{i})(1+3\mathrm{i}) = 2 - 3 + 6\mathrm{i} + \mathrm{i} = -1 + 7\mathrm{i}$
2. $b = \left(\dfrac{3}{2} - 2\mathrm{i}\right)\left(2 + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right) = 3 + 3 + \dfrac{9}{4}\mathrm{i} - 4\mathrm{i} = 6 - \dfrac{7}{4}\mathrm{i}$
3. $c = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)(1+2\mathrm{i}) = -\dfrac{1}{2} + 1 - \mathrm{i} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$
4. $d = \left(-\dfrac{2}{3} - \mathrm{i}\right)(3-4\mathrm{i}) = -2 - 4 + \dfrac{8}{3}\mathrm{i} - 3\mathrm{i} = -6 - \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 30 :

1. $a=(2+\mathrm{i})^3=2^3+3\times 2^2\times\mathrm{i}+3\times 2\times\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3=8+12\mathrm{i}-6-\mathrm{i}=2+11\mathrm{i}$
2. $b=(1-2\mathrm{i})^4=1^4-4\times 2\mathrm{i}+6\times(2\mathrm{i})^2-4\times(2\mathrm{i})^3+(2\mathrm{i})^4=1-8\mathrm{i}-24+32\mathrm{i}+16=-7+24\mathrm{i}$
3. $c=(1-\mathrm{i})^5=1-5\mathrm{i}+10\mathrm{i}^2-10\mathrm{i}^3+5\mathrm{i}^4-\mathrm{i}^5=1-5\mathrm{i}-10+10\mathrm{i}+5-\mathrm{i}=-4+4\mathrm{i}$
4. $d=\left(\overline{1-\mathrm{i}}\right)^5=\overline{(1-\mathrm{i})^5}=\overline{c}=\overline{-4+4\mathrm{i}}=-4-4\mathrm{i}$

Corrigé exercice 31 :

z_1 et z_2 sont égaux si, et seulement si, leur partie réelle et leur partie imaginaire sont égales.
On cherche donc les réels a et b tels que $\begin{cases}a^2+a=3a^2-3\\ b^2+1=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a^2-a-3=0\\ b^2-2b+1=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}2a^2-a-3=0\\ (b-1)^2=0\end{cases}$. Or le discriminant du polynôme $2a^2-a-3$ est égal à $\Delta=(-1)^2-4\times 2\times(-3)=25>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles $a_1=-1$ et $a_2=\dfrac{3}{2}$. Ainsi $z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=1\end{cases}$.
On obtient alors $z_1=z_2=2\mathrm{i}$ ou $z_1=z_2=\dfrac{15}{4}+2\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 34 :

On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels.

1. $2z-3\mathrm{i}\overline{z}=-5-\mathrm{i}\Leftrightarrow 2(x+\mathrm{i}y)-3\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)=-5-\mathrm{i}\Leftrightarrow(2x-3y)+\mathrm{i}(2y-3x)=-5-\mathrm{i}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=-5\\ 2y-3x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{13}{5}\\ y=\dfrac{17}{5}\end{cases}$ donc $S=\left\{\dfrac{13}{5}+\mathrm{i}\dfrac{17}{5}\right\}$.
2. $\mathrm{i}z+\overline{z}-3=7-\overline{z}+5\mathrm{i}\Leftrightarrow\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)+x-\mathrm{i}y-3=x+\mathrm{i}y-x+\mathrm{i}y+5\mathrm{i}\Leftrightarrow x-y-3+\mathrm{i}(x-y)=\mathrm{i}(2y-5)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-3=0\\ x-y=2y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$ donc $S=\{2-\mathrm{i}\}$.
3. $2z-\mathrm{i}\overline{z}=\mathrm{i}(3+z)+\overline{z}\Leftrightarrow 2(x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)=\mathrm{i}(3+x+\mathrm{i}y)+x-\mathrm{i}y\Leftrightarrow 2x+2\mathrm{i}y-\mathrm{i}x-y=3\mathrm{i}+\mathrm{i}x-y+x-\mathrm{i}y\Leftrightarrow 2x-y+\mathrm{i}(2y-x)=x-y+\mathrm{i}(x-y+3)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=x-y\\ 2y-x=x-y+3\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$ donc $S=\{\mathrm{i}\}$.
4. $2\mathrm{i}(z+1)+3\overline{z}+1=3z-\mathrm{i}\left(\overline{z}+\dfrac{5}{2}\right)\Leftrightarrow 2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y+1)+3(x-\mathrm{i}y)+1=3(x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}\left(x-\mathrm{i}y+\dfrac{5}{2}\right)\Leftrightarrow 2\mathrm{i}x-2y+2\mathrm{i}+3x-3\mathrm{i}y+1=3x+3\mathrm{i}y-\mathrm{i}x-y-\dfrac{5}{2}\mathrm{i}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}3x-2y+1=3x-y\\ 2x-3y+2=-x+3y-\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\end{cases}\quad \text{donc } S=\left\{\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right\}.$$

Corrigé exercice 35 :

1. $a=\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}=\dfrac{3-2\mathrm{i}}{3^2+2^2}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}\mathrm{i}$
2. $b=\dfrac{4}{-2-\mathrm{i}}=\dfrac{4\,(-2+\mathrm{i})}{(-2)^2+(-1)^2}=-\dfrac{8}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$
3. $c=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=1$
4. $d=\dfrac{6+4\mathrm{i}}{-5-3\mathrm{i}}=\dfrac{(6+4\mathrm{i})\,(-5+3\mathrm{i})}{(-5)^2+(-3)^2}=\dfrac{-30-12+\mathrm{i}(18-20)}{34}=-\dfrac{21}{17}-\dfrac{1}{17}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 36 :

1. $3z-\mathrm{i}=\mathrm{i}z-2\Leftrightarrow(3-\mathrm{i})z=\mathrm{i}-2\Leftrightarrow z=\dfrac{-2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\Leftrightarrow z=\dfrac{(-2+\mathrm{i})\,(3+\mathrm{i})}{3^2+(-1)^2}$
   $\Leftrightarrow z=\dfrac{-6-1+\mathrm{i}(-2+3)}{10}\Leftrightarrow z=-\dfrac{7}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$
2. $2(1+z)-\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})z\Leftrightarrow 2+2z-(1+\mathrm{i})z=\mathrm{i}\Leftrightarrow(1-\mathrm{i})z=\mathrm{i}-2\Leftrightarrow z=\dfrac{-2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$
   $\Leftrightarrow z=\dfrac{(-2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1^2+(-1)^2}\Leftrightarrow z=\dfrac{-2-1+\mathrm{i}(-2+1)}{2}\Leftrightarrow z=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$
3. $(1+\mathrm{i})z=2-\mathrm{i}z\Leftrightarrow(1+2\mathrm{i})z=2\Leftrightarrow z=\dfrac{2}{1+2\mathrm{i}}\Leftrightarrow z=\dfrac{2(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2}\Leftrightarrow z=\dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$
4. $z(1+2\mathrm{i})+3=3(\mathrm{i}z-1)\Leftrightarrow z+2\mathrm{i}z+3=3\mathrm{i}z-3\Leftrightarrow(1-\mathrm{i})z=-6\Leftrightarrow z=-\dfrac{6}{1-\mathrm{i}}\Leftrightarrow$
   $z=-\dfrac{6(1+\mathrm{i})}{1^2+(-1)^2}\Leftrightarrow z=-3-3\mathrm{i}$

Corrigé exercice 39 :

1. $\overline{z}=\overline{\left(\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right)}=\overline{-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$
2. $\overline{z}=\overline{\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}\right)}=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1^2+(-1)^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$
3. $\overline{z}=\overline{\left(\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right)}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})\,(1-2\mathrm{i})}{1^2+2^2}=\dfrac{2-2+\mathrm{i}(-4-1)}{5}=-\mathrm{i}$
4. $\overline{z}=\overline{\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}\right)}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}-1}=\dfrac{(1+\mathrm{i})(2\mathrm{i}-1)}{(-1)^2+(-2)^2}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$

5. $\overline{z}=\overline{\left(\dfrac{3+2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-3}\right)}=\dfrac{3-2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}-3}=\dfrac{(3-2\mathrm{i})\,(2\mathrm{i}-3)}{(-3)^2+(-2)^2}=\dfrac{-9+4+\mathrm{i}(6+6)}{13}=-\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13}\mathrm{i}$

6. $\overline{z}=\overline{\left(\dfrac{-1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\right)}=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{(-1+\mathrm{i})\,(2+\mathrm{i})}{2^2+(-1)^2}=\dfrac{-2-1+\mathrm{i}(-1+2)}{5}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 40 :

L'affirmation est fausse. On peut par exemple prendre comme contre-exemple $z=\mathrm{i}$. On a alors, d'un côté, $\overline{2+\mathrm{i}\times\mathrm{i}}=1$ et, de l'autre, $2-\mathrm{i}\times\mathrm{i}=3$. D'où $\overline{2+\mathrm{i}\times\mathrm{i}}\neq 2-\mathrm{i}\times\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 41 :

$\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}-\dfrac{2-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(3+\mathrm{i})}{3^2+(-1)^2}=\dfrac{-2+6\mathrm{i}}{10}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}\notin\mathrm{i}\mathbb{R}$. L'affirmation est donc fausse.

Corrigé exercice 42 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(4+2\mathrm{i})^n+(4-2\mathrm{i})^n=(4+2\mathrm{i})^n+(\overline{4+2\mathrm{i}})^n=(4+2\mathrm{i})^n+\overline{(4+2\mathrm{i})^n}$ $=\mathrm{Re}\left((4+2\mathrm{i})^n\right)\in\mathbb{R}$. Donc l'affirmation est vraie.

Corrigé exercice 43 :

1. $z^2-2z+5=0$ admet pour discriminant $\Delta=(-2)^2-4\times1\times5=-16=(4\mathrm{i})^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{2+4\mathrm{i}}{2}=1+2\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=1-2\mathrm{i}$.

2. $z^2-4z+13=0$ admet pour discriminant $\Delta=(-4)^2-4\times1\times13=-36=(6\mathrm{i})^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{4+6\mathrm{i}}{2}=2+3\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=2-3\mathrm{i}$.

3. $4z^2+4z+5=0$ admet pour discriminant $\Delta=4^2-4\times4\times5=-64=(8\mathrm{i})^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-4+8\mathrm{i}}{8}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}$.

4. $2z^2+6z+5=0$ admet pour discriminant $\Delta=6^2-4\times2\times5=-4=(2\mathrm{i})^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-6+2\mathrm{i}}{4}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Corrigé exercice 55 :

1. $z=1-2\mathrm{i}$

2. $z=-4$

3. $z=-1+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}+2=1+2\mathrm{i}$

4. $z = 3 - \frac{2}{3}\mathrm{i} - 2 - \frac{1}{3}\mathrm{i} = 1 - \mathrm{i}$

Corrigé exercice 59 :

1. $z = 3 - 4 + \mathrm{i}(12 + 1) = -1 + 13\mathrm{i}$
2. $z = -2 - 6 + \mathrm{i}(4 - 3) = -8 + \mathrm{i}$
3. $z = 10 - 2 + \mathrm{i}(-10 - 2) = 8 - 12\mathrm{i}$
4. $z = -\frac{9}{4} + \frac{2}{9} + \mathrm{i}\left(-1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{73}{36} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 60 :

1. $z = \left(3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(2\mathrm{i}\sqrt{3} + 5\right) = 15 - 6 + \mathrm{i}\left(6\sqrt{3} + 5\sqrt{3}\right) = 9 + 11\mathrm{i}\sqrt{3}$
2. $z = \left(2\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(3\mathrm{i}\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = -4 - 9 + \mathrm{i}\left(6\sqrt{6} - \sqrt{6}\right) = -13 + 5\mathrm{i}\sqrt{6}$
3. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{2 - \sqrt{2}}{4}$
4. $z = \left(2\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\left(-4 - \frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{6}}{2} - \frac{11}{2}\mathrm{i}$
5. $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Corrigé exercice 63 :

1. $z = (2 + 3\mathrm{i})^2 = 4 - 9 + 12\mathrm{i} = -5 + 12\mathrm{i}$
2. $z = \left(1 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2 = 1 - 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} = -1 - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$
3. $z = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i} - 1\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} - \mathrm{i} = \frac{3}{4} - \mathrm{i}$
4. $z = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\mathrm{i} = \frac{7}{36} + \frac{2}{3}\mathrm{i}$

Corrigé exercice 64 :

1. $z = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \mathrm{i} = -\mathrm{i}$

3. $z=\left(2\sqrt{3}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2=12-2-4\mathrm{i}\sqrt{6}=10-4\mathrm{i}\sqrt{6}$

Corrigé exercice 66 :

1. $z=(1-\mathrm{i})^3=1^3-3\times 1^2\times\mathrm{i}+3\times 1\times\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^3=1-3\mathrm{i}-3-(-\mathrm{i})=-2-2\mathrm{i}$
2. $z=\left(\dfrac{1}{3}-\mathrm{i}\right)^3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\mathrm{i}+3\times\dfrac{1}{3}\times\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^3=\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}-1+\mathrm{i}=-\dfrac{26}{27}+\dfrac{2}{3}\mathrm{i}$
3. $z=(1+2\mathrm{i})^4=1^4+4\times1^3\times2\mathrm{i}+6\times1^2\times(2\mathrm{i})^2+4\times1\times(2\mathrm{i})^3+(2\mathrm{i})^4=1+8\mathrm{i}-24-32\mathrm{i}+16=-7-24\mathrm{i}$
4. $z=\left(\sqrt{2}-\mathrm{i}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4-4\times\left(\sqrt{2}\right)^3\times\mathrm{i}+6\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times\mathrm{i}^2-4\times\sqrt{2}\times\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4$ $=4-8\mathrm{i}\sqrt{2}-12+4\mathrm{i}\sqrt{2}+1=-7-4\mathrm{i}\sqrt{2}$

Corrigé exercice 67 :

1. $z=(1+\mathrm{i})^5=1+5\mathrm{i}+10\mathrm{i}^2+10\mathrm{i}^3+5\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^5=1+5\mathrm{i}-10-10\mathrm{i}+5+\mathrm{i}=-4-4\mathrm{i}$
2. $z=(1-2\mathrm{i})^5=1-5\times2\mathrm{i}+10(2\mathrm{i})^2-10(2\mathrm{i})^3+5(2\mathrm{i})^4-(2\mathrm{i})^5=1-10\mathrm{i}-40+80\mathrm{i}+80-32\mathrm{i}=41+38\mathrm{i}$
3. $z=(1+\mathrm{i})^5(1-\mathrm{i})^5=\left((1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})\right)^5=(1-\mathrm{i}^2)^5=2^5=32$
4. $z=(2+\mathrm{i})^5=2^5+5\times2^4\times\mathrm{i}+10\times2^3\times\mathrm{i}^2+10\times2^2\times\mathrm{i}^3+5\times2\times\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^5$ $=32+80\mathrm{i}-80-40\mathrm{i}+10+\mathrm{i}=-38+41\mathrm{i}$
5. $z=(2-2\mathrm{i})^5=2^5-5\times2^4\times2\mathrm{i}+10\times2^3\times(2\mathrm{i})^2-10\times2^2\times(2\mathrm{i})^3+5\times2\times(2\mathrm{i})^4-(2\mathrm{i})^5$ $=32-160\mathrm{i}-320+320\mathrm{i}+160-32\mathrm{i}=-128+128\mathrm{i}$
6. $z=(2+\mathrm{i})^5(2-\mathrm{i})^5=\left((2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})\right)^5=(2^2-\mathrm{i}^2)^5=(4+1)^5=5^5=3125$

Corrigé exercice 79 :

1. $a=\overline{0}=0$
2. $b=\bar{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$
3. $c=\overline{(-\mathrm{i})}=\mathrm{i}$
4. $d=\overline{(1+\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$
5. $e=\overline{(1-\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$
6. $f=\overline{(3+2\mathrm{i})}=3-2\mathrm{i}$
7. $g=\overline{\left(\dfrac{1}{2}-2\mathrm{i}\right)}=\dfrac{1}{2}+2\mathrm{i}$
8. $h=\overline{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2}$

Corrigé exercice 80 :

1. $a = 3(1+\mathrm{i}) - 2\mathrm{i}(1-2\mathrm{i}) = 3 + 3\mathrm{i} - 2\mathrm{i} - 4 = -1 + \mathrm{i}$ donc $\overline{a} = -1 - \mathrm{i}$.

2. $b = \sqrt{2}(1-\mathrm{i}) + 2\mathrm{i}\sqrt{2}(1+\mathrm{i}) = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ donc $\overline{b} = -\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

3. $c = \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\left(1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) - \dfrac{1}{2}(2\mathrm{i}+1) = \dfrac{3}{2}\mathrm{i} - \dfrac{3}{4} - \mathrm{i} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ donc $\overline{c} = -\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

4. $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2+\mathrm{i}) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \mathrm{i}\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} - 3\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ donc $\overline{d} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} + 3\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Corrigé exercice 94 :

1. $\mathrm{i}z + 3(z-\mathrm{i}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{i}z + 3z - 3\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow (3+\mathrm{i})z = 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{3\mathrm{i}(3-\mathrm{i})}{3^2+1^2} \Leftrightarrow$ $z = \dfrac{9\mathrm{i}+3}{10} \Leftrightarrow z = \dfrac{3}{10} + \dfrac{9}{10}\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{3}{10} + \dfrac{9}{10}\mathrm{i}\right\}$.

2. $(4+\mathrm{i})z = 4 - z \Leftrightarrow (4+\mathrm{i}+1)z = 4 \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{5+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{4(5-\mathrm{i})}{5^2+1^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{20-4\mathrm{i}}{26} \Leftrightarrow$ $z = \dfrac{10}{13} - \dfrac{2}{13}\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{10}{13} - \dfrac{2}{13}\mathrm{i}\right\}$.

3. $(2\mathrm{i}+1)z = 1 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}z \Leftrightarrow (2\mathrm{i}+1+2\mathrm{i})z = 1+\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+4\mathrm{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(1-4\mathrm{i})}{1^2+4^2} \Leftrightarrow$ $z = \dfrac{1+4+\mathrm{i}(-4+1)}{17} \Leftrightarrow z = \dfrac{5}{17} - \dfrac{3}{17}\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{5}{17} - \dfrac{3}{17}\mathrm{i}\right\}$.

4. $\dfrac{z+1}{z-2} = 3\mathrm{i}$ est définie si, et seulement si, $z \neq 2$.

   Et, pour $z \neq 2$, $\dfrac{z+1}{z-2} = 3\mathrm{i} \Leftrightarrow z + 1 = 3\mathrm{i}z - 6\mathrm{i} \Leftrightarrow (1-3\mathrm{i})z = -1 - 6\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{-1-6\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$ $\Leftrightarrow z = \dfrac{(-1-6\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{1^2+(-3)^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+18+\mathrm{i}(-3-6)}{10} \Leftrightarrow z = \dfrac{17}{10} - \dfrac{9}{10}\mathrm{i}$ qui est bien une solution car $\dfrac{17}{10} - \dfrac{9}{10}\mathrm{i} \neq 2$. D'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{17}{10} - \dfrac{9}{10}\mathrm{i}\right\}$.

Corrigé exercice 99 :

1. C'est vrai car $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = 1 + 3\mathrm{i} + 3 - 2\mathrm{i} = 4 + \mathrm{i}$.

2. C'est faux car $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2} = (1+3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i}) = 3 + 6 + \mathrm{i}(-2+9) = 9 + 7\mathrm{i}$ et non $9 - 7\mathrm{i}$.

3. C'est vrai car $\overline{(z_1)^3} = \left(\overline{z_1}\right)^3 = (1+3\mathrm{i})^3 = 1^3 + 3 \times 3\mathrm{i} + 3 \times (3\mathrm{i})^2 + (3\mathrm{i})^3 = 1 + 9\mathrm{i} - 27 - 27\mathrm{i} = -26 - 18\mathrm{i}$.

4. C'est faux car $\overline{(z_1 \times \overline{z_2})^2} = (\overline{z_1} \times z_2)^2 = \overline{z_1}^2 \times z_2^2 = (1+3\text{i})^2(3+2\text{i})^2 = (1-9+6\text{i})(9-4+12\text{i}) = (-8+6\text{i})(5+12\text{i}) = -40-72+\text{i}(-96+30) = -112-66\text{i}$ et non $112-66\text{i}$.

Corrigé exercice 100 :

1. C'est vrai car leur produit est égal à 1 : $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{i}\right)(1+\text{i}) = \frac{1}{2}(1-\text{i})(1+\text{i}) = \frac{1}{2}(1^2-\text{i}^2)$ $= \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.
2. C'est vrai car $\frac{1}{1+\text{i}}$ et $\frac{1}{1-\text{i}}$ sont conjugués. En effet : $\overline{\left(\frac{1}{1+\text{i}}\right)} = \frac{\overline{1}}{\overline{1+\text{i}}} = \frac{1}{1-\text{i}}$.
3. C'est vrai car $\frac{4+2\text{i}}{1-\text{i}} = \frac{(4+2\text{i})(1+\text{i})}{1^2+(-1)^2} = \frac{4-2+\text{i}(4+2)}{2} = \frac{2+6\text{i}}{2} = 1+3\text{i}$et le conjugué de $1+3\text{i}$ est $1-3\text{i}$.
4. C'est faux car $(1+\text{i})^3 = 1^3+3\text{i}+3\text{i}^2+\text{i}^3 = 1+3\text{i}-3-\text{i} = -2+2\text{i}$ et $\frac{4}{1+\text{i}} = \frac{4(1-\text{i})}{1^2+1^2} = \frac{4(1-\text{i})}{2} = 2(1-\text{i}) = 2-2\text{i}$. Ces deux nombres complexes ne sont donc pas conjugués (ils sont par contre opposés).
5. C'est faux car $\overline{(1+2\text{i})(2\text{i}+3)} = \overline{(1+2\text{i})(2\text{i}+3)} = (1-2\text{i})(3-2\text{i})$.
6. C'est vrai car $z_2 = \overrightarrow{\overline{z_1}}$.

Corrigé exercice 101 :

1. C'est vrai car $\text{i}z-3+\text{i} = (2+\text{i})z+1 \Leftrightarrow \text{i}z-3+\text{i} = 2z+\text{i}z+1 \Leftrightarrow 2z = -4+\text{i}$ $\Leftrightarrow z = -2+\frac{1}{2}\text{i}$ et le conjugué de cette solution est bien $-2-\frac{1}{2}\text{i}$.
2. C'est faux car $2\text{i}\overline{(-1-3\text{i})} = 2\text{i}(-1+3\text{i}) = -2\text{i}-6$ et $5(1-\text{i})-\overline{(-1-3\text{i})} = 5-5\text{i}-(-1+3\text{i}) = 5-5\text{i}+1-3\text{i} = 6-8\text{i}$ donc $-1-3\text{i}$ n'est pas solution de $2\text{i}\overline{z} = 5(1-\text{i})-\overline{z}$.
3. C'est faux car si on pose $z = a+\text{i}b$ avec a et b réels, alors on peut écrire $\overline{z} = a-\text{i}b$ et on a alors $2z-\text{i}\overline{z} = 3+\text{i}+2\overline{z} \Leftrightarrow 2(a+\text{i}b)-\text{i}(a-\text{i}b) = 3+\text{i}+2(a-\text{i}b)$ $\Leftrightarrow 2a+2\text{i}b-\text{i}a-b = 3+\text{i}+2a-2\text{i}b \Leftrightarrow \begin{cases} -b = 3 \\ 2b-a = 1-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 4b-1 = -13 \end{cases}$.
L'équation admet donc bien une solution dans $\mathbb{C}$.
4. C'est vrai car $\begin{cases} 2z_1 - z_2 = 1+3\text{i} \\ \overline{z_1}+2\overline{z_2} = 3+\text{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1 - z_2 = 1+3\text{i} : (L_1) \\ z_1+2z_2 = 3-\text{i} : (L_2) \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} (2L_1+L_2) : 5z_1 = 5+5\text{i} \\ (L_1-2L_2) : -5z_2 = -5+5\text{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1+\text{i} \\ z_2 = 1-\text{i} \end{cases}$.
Et on a bien $\overline{z_1} = \overline{1+\text{i}} = 1-\text{i} = z_2$.

Corrigé exercice 108 :

1. $(z+3\mathrm{i})(2z-3+\mathrm{i})=0 \Leftrightarrow z+3\mathrm{i}=0$ ou $2z-3+\mathrm{i}=\Leftrightarrow z=-3\mathrm{i}$ ou $z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-3\mathrm{i};\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right\}$.

2. $(z-2\mathrm{i})(\mathrm{i}z+1)=0 \Leftrightarrow z-2\mathrm{i}=0$ ou $\mathrm{i}z+1=0 \Leftrightarrow z=2\mathrm{i}$ ou $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}=\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\{\mathrm{i};2\mathrm{i}\}$.

3. $(\mathrm{i}z+1+\mathrm{i})(3\mathrm{i}z+1)=0 \Leftrightarrow z=-\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ ou $z=-\dfrac{1}{3\mathrm{i}} \Leftrightarrow z=-\dfrac{(1+\mathrm{i})\times(-\mathrm{i})}{1}$ ou $z=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\mathrm{i}} \Leftrightarrow z=-1+\mathrm{i}$ ou $z=\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-1+\mathrm{i};\dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right\}$.

4. $((1+\mathrm{i})z-1)((2+\mathrm{i})z+1)=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$ ou $z=-\dfrac{1}{2+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1^2+1^2}$ ou $z=-\dfrac{2-\mathrm{i}}{2^2+1^2} \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ ou $z=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$ d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i};-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}\right\}$.

Corrigé exercice 110 :

1. $z^2+z=0 \Leftrightarrow z(z+1)=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=-1$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\{-1;0\}$.

2. $z^2+2\mathrm{i}z=0 \Leftrightarrow z(z+2\mathrm{i})=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=-2\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\{-2\mathrm{i};0\}$.

3. $2\mathrm{i}z^2+3z=0 \Leftrightarrow z(2\mathrm{i}z+3)=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=-\dfrac{3}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\dfrac{3}{2}\times(-\mathrm{i})=\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{3}{2}\mathrm{i};0\right\}$.

4. $(1+\mathrm{i})z^2=(2-\mathrm{i})z \Leftrightarrow z((1+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i}))=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1^2+1^2}=\dfrac{2-1+\mathrm{i}(-2-1)}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i};0\right\}$.

5. $(1+2\mathrm{i})z^2+(2\mathrm{i}-1)z=0 \Leftrightarrow z((1+2\mathrm{i})z+(2\mathrm{i}-1))=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(1-2\mathrm{i})^2}{1^2+2^2}=\dfrac{1-4-4\mathrm{i}}{5}=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$, d'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i};0\right\}$.

Corrigé exercice 111 :

1. $z^2+z+1=0$ a pour discriminant $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

2. $z^2+4z+13=0$ a pour discriminant $\Delta=4^2-4\times1\times13=-36=(6\text{i})^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-4-6\text{i}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{-4+6\text{i}}{2}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\{-2-3\text{i};-2+3\text{i}\}$.

3. $4z^2-4z+17=0$ a pour discriminant $\Delta=(-4)^2-4\times4\times17=-256=(16\text{i})<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{4-16\text{i}}{8}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{4+16\text{i}}{8}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\dfrac{1}{2}-2\text{i};\dfrac{1}{2}+2\text{i}\right\}$.

4. $2z^2+2z+5=0$ a pour discriminant $\Delta=2^2-4\times2\times5=-36=(6\text{i})<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-2-6\text{i}}{4}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{-2+6\text{i}}{4}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\text{i};-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\text{i}\right\}$.

5. $z^2-\sqrt{2}z+1=0$ a pour discriminant $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times1=\left(\text{i}\sqrt{2}\right)^2<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}}{2}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

6. $9z^2-6z+19=0$ a pour discriminant $\Delta=-648=\left(18\text{i}\sqrt{2}\right)^2$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{1}{3}-\sqrt{2}\text{i}$ et $z_2=\dfrac{1}{3}+\sqrt{2}\text{i}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\dfrac{1}{3}-\sqrt{2}\text{i};\dfrac{1}{3}+\sqrt{2}\text{i}\right\}$.

Corrigé exercice 113 :

On pose $t=z^2$. On a ainsi $t^2=z^4$.

1. $z^4+z^2-6=0\Leftrightarrow t^2+t-6=0\Leftrightarrow t=2$ ou $t=-3\Leftrightarrow z^2=2$ ou $z^2=-3\Leftrightarrow z=-\sqrt{2}$ ou $z=\sqrt{2}$ ou $z=-\text{i}\sqrt{3}$ ou $z=-\text{i}\sqrt{3}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-\text{i}\sqrt{3};\text{i}\sqrt{3}\right\}$.

2. $z^4+z^2-2=0\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow t=1$ ou $t=-2\Leftrightarrow z^2=1$ ou $z^2=-2\Leftrightarrow z=-1$ ou $z=1$ ou $z=-\text{i}\sqrt{2}$ ou $z=-\text{i}\sqrt{2}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\left\{-1;1;-\text{i}\sqrt{2};\text{i}\sqrt{2}\right\}$.

3. $z^4+3z^2+2=0\Leftrightarrow t^2+3t+2=0\Leftrightarrow t=-1$ ou $t=-2\Leftrightarrow z^2=-1$ ou $z^2=-2\Leftrightarrow z=-\text{i}$ ou $z=\text{i}$ ou $z=-\text{i}\sqrt{2}$ ou $z=\text{i}\sqrt{2}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\text{i};\text{i};-\text{i}\sqrt{2};\text{i}\sqrt{2}\right\}$.

4. $8z^4+6z^2+1=0\Leftrightarrow 8t^2+6t+1=0$ de discriminant $\Delta=6^2-4\times8\times1=4>0$ donc l'équation $8t^2+6t+1=0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1=\dfrac{-6-2}{16}=-\dfrac{1}{2}$ et $t_2=\dfrac{-6+2}{16}=-\dfrac{1}{4}$. Ainsi, $8z^4+6z^2+1=0\Leftrightarrow z^2=-\dfrac{1}{2}$ ou $z^2=-\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow z=-\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $z=\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $z=-\dfrac{1}{2}\text{i}$ ou $z=\dfrac{1}{2}\text{i}$. D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2};\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{1}{2}\text{i};\dfrac{1}{2}\text{i}\right\}$.

5. $8z^4 + 22z^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow 8t^2 + 22t + 15 = 0$ de discriminant $\Delta = 22^2 - 4 \times 8 \times 15 = 4 > 0$ donc l'équation $8t^2 + 22t + 15 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1 = \dfrac{-22-2}{16} = -\dfrac{3}{2}$ et $t_2 = \dfrac{-22+2}{16} = -\dfrac{5}{4}$. Ainsi, $8z^4 + 22z^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -\dfrac{3}{2}$ ou $z^2 = -\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow z = -\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ ou $z = \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ ou $z = -\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ou $z = \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.. Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4}; \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}}{4}; -\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2}; \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

6. $z^3 + 5z + \dfrac{4}{z} = 0$ est définie pour $z \neq 0$. Et, pour $z \neq 0$, $z^3 + 5z + \dfrac{4}{z} = 0 \Leftrightarrow z^4 + 5z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 5t + 4 = 0$ de discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$ donc l'équation $t^2 + 5t + 4 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1 = \dfrac{-5-3}{2} = -4$ et $t_2 = \dfrac{-5+3}{2} = -1$. Ainsi, $z^3 + 5z + \dfrac{4}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4$ ou $z^2 = -1 \Leftrightarrow z = -2\mathrm{i}$ ou $z = 2\mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$ ou $z = \mathrm{i}$. Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \{-2\mathrm{i}; 2\mathrm{i}; -\mathrm{i}; \mathrm{i}\}$.

7. $z^2 + 2 = \dfrac{3}{z^2}$ est définie pour $z \neq 0$. Et, pour $z \neq 0$, $z^2 + 2 = \dfrac{3}{z^2} \Leftrightarrow z^4 + 2z^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$ de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ donc l'équation $t^2 + 2t - 3 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ et $t_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$. Ainsi $z^3 + 5z + \dfrac{4}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 = 1$ ou $z^2 = -3 \Leftrightarrow z = -1$ ou $z = 1$ ou $z = -\mathrm{i}\sqrt{3}$ ou $z = \mathrm{i}\sqrt{3}$. D'où $S_{\mathbb{C}} = \{-1; 1; -\mathrm{i}\sqrt{3}; \mathrm{i}\sqrt{3}\}$.

8. $\dfrac{2}{z^4} + \dfrac{7}{z^2} = -3$ est définie pour $z \neq 0$. Et, pour $z \neq 0$, $\dfrac{2}{z^4} + \dfrac{7}{z^2} = -3 \Leftrightarrow 3z^4 + 7z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 7t + 2 = 0$ de discriminant $\Delta = 7^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 > 0$ donc l'équation $3t^2 + 7t + 2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : $t_1 = \dfrac{-7-5}{6} = -2$ et $t_2 = \dfrac{-7+5}{6} = -\dfrac{1}{3}$. Ainsi $\dfrac{2}{z^4} + \dfrac{7}{z^2} = -3 \Leftrightarrow z^2 = -2$ ou $z^2 = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow z = -\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z = \mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z = -\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $z = \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ainsi $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\mathrm{i}\sqrt{2}; \mathrm{i}\sqrt{2}; -\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.