Parcours d'exercices

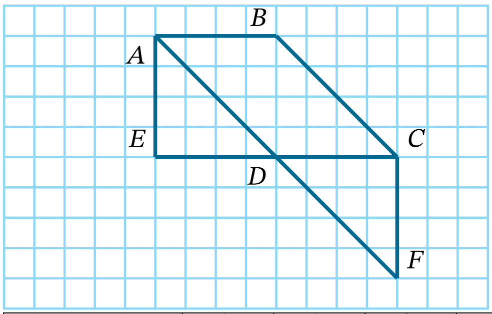
Vecteurs sans coordonnées

19

Géométrie

Exercice 1

Dans cette figure, où $ABDE$ est un carré et où $ACFE$ est un parallélogramme, cocher dans le tableau les couples de vecteurs qui vérifient les propriétés :

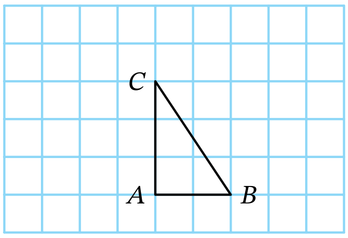


	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DF}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CF}$
Même direction				
Même sens				
Même norme				
Egaux				
Opposés				

Exercice 2

On donne un triangle ABC rectangle en A.

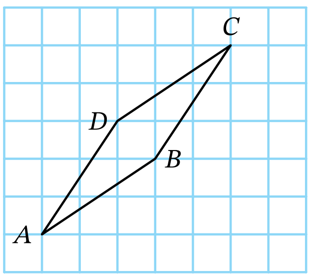
Construire le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{BC}$.



Exercice 3

$ABCD$ est un losange.

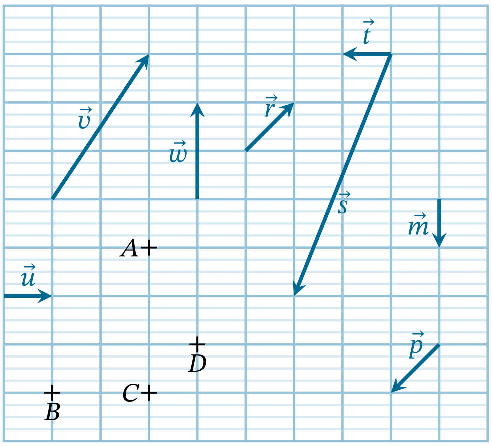
Construire le représentant d'extrémité C de $\overrightarrow{BD}$.



Exercice 4

À partir de la figure ci-dessous, citer un vecteur :

1) opposé à $\overrightarrow{CD}$;
2) de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$;
3) de même direction que $\overrightarrow{BC}$ mais de sens contraire ;
4) égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$.



Exercice 5

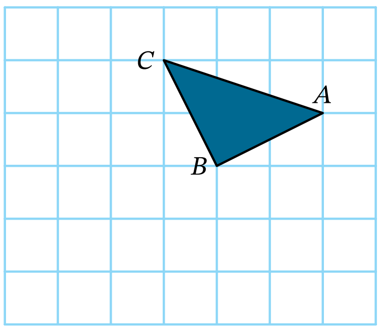
Placer deux points A et B et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Construire un vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$.
2) Construire un vecteur de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et qui n'est pas égal à $\overrightarrow{AB}$.
3) Construire un vecteur de même direction que $\overrightarrow{AB}$ mais de sens contraire et qui n'est pas égal à $\overrightarrow{BA}$.

Translations :

Exercice 6

À partir de la figure ci-dessous, construire le translaté du triangle ABC dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

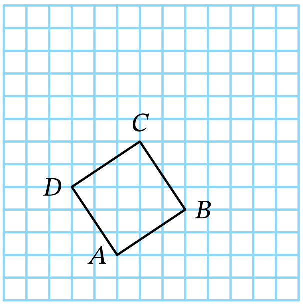


Exercice 7

$ABCD$ est un carré de centre O.

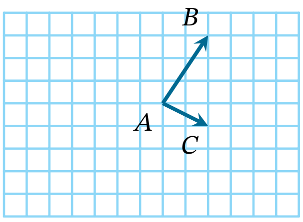
Construire l'image de ce carré par

1) la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
2) la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;
3) la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.



Exercice 8

On considère les trois points A, B et C dans le figure ci-dessous.



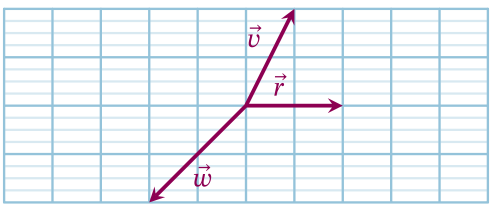
1) Construire le point D tel que A soit son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2) Construire le point E tel que A soit son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3) Démontrer que le quadrilatère $BCED$ est un parallélogramme.

Opérations avec les vecteurs.

Exercice 9

Construire les vecteurs suivants :

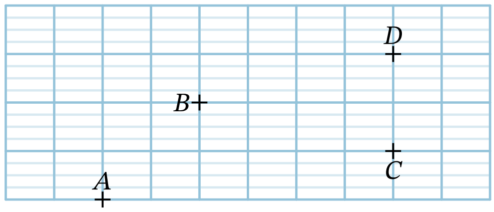
1) $\vec{w} + \vec{r}$
2) $\vec{r} + \vec{v}$
3) $\vec{v} + \vec{w}$



Exercice 10

Construire les vecteurs suivants :

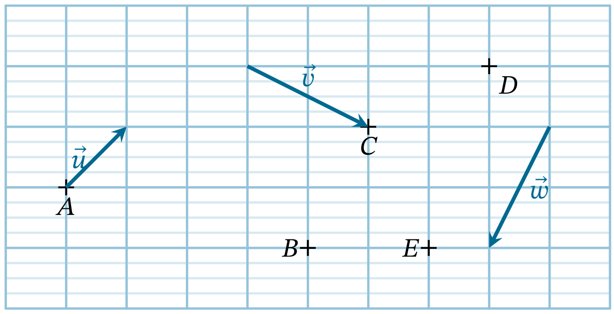
1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$



Exercice 11

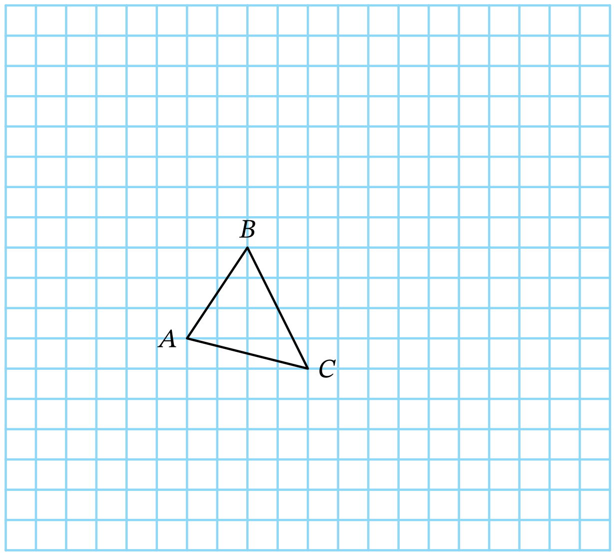
Construire un représentant des vecteurs suivants.

1) $\overrightarrow{AB} - \vec{u}$
2) $\vec{v} - \overrightarrow{CB}$
3) $-\vec{w} + \overrightarrow{DE}$



Exercice 12

ABC est un triangle.



Placer les points M, N, P et R définis par :

$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $\quad$ $\overrightarrow{CR} = 3\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC}$

Relation de Chasles :

Exercice 13

Tous les triangles tracés sur la figure ci-dessous sont équilatéraux.

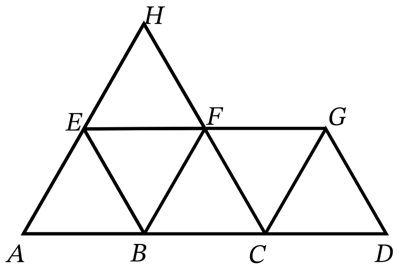
Remplacer les sommes vectorielles suivantes par un vecteur unique.

1) $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}$.

2) $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{FC}$.

3) $-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$.

4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}$.



Exercice 14

Écrire le plus simplement possible.

1) $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}$

2) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BD}$

3) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}$

4) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DB}$

5) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{EM}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{EC}$

6) $-\overrightarrow{AU}+\overrightarrow{SH}-\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{MU}$

Exercice 15

Soit A, B, C, E et F cinq points du plan.
Démontrer les égalités suivantes :

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

2) $\overrightarrow{\mathrm{BE}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

3) $2\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}$.

Vecteurs colinéaires

Exercice 16

Soit A, B et C trois points du plan.
On considère le vecteur :

$$\vec{u}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Démontrer, sans faire de figure, que le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 17

Soient $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CB}$
et $\vec{v}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AB}$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

Démontrer avec les vecteurs :

Exercice 18

ABC est un triangle.
D et E sont les points tels que :

$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{BC}$$

Démontrer que C est le milieu du segment $[AD]$.

Exercice 19

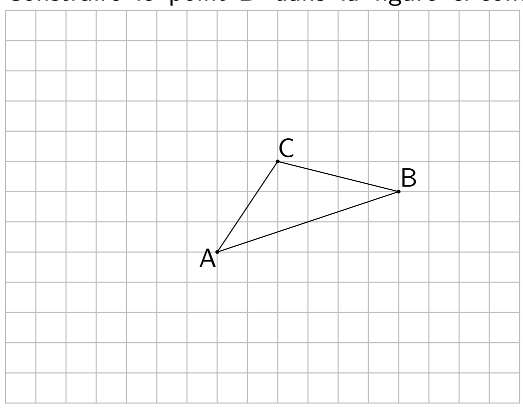
A B C D est un quadrilatère tel que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$. Soit E le symétrique de A par rapport à C.
Démontrer que E est le symétrique de B par rapport à D.

Exercice 20

Soit ABC un triangle quelconque et D le point vérifiant la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

1) Construire le point D dans la figure ci-contre.



2) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   b) Montrer que $\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

3) En déduire que les points B, C et D sont alignés.

Accès aux corrigés

(Correction)

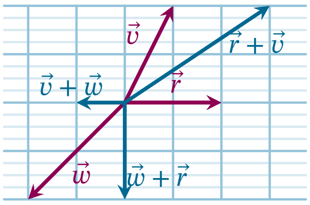
Corrigé de l'exercice 5

Corrigé de l'exercice 6

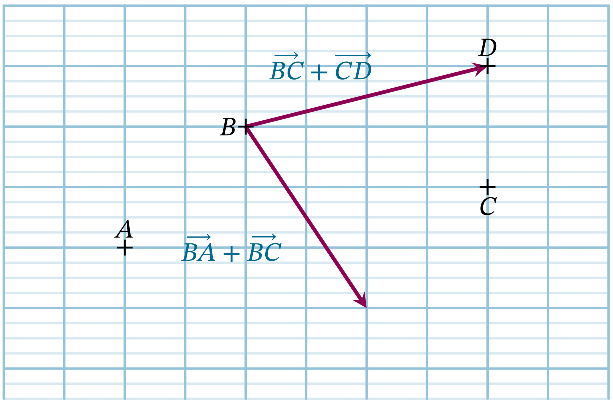
Corrigé de l'exercice 7

Corrigé de l'exercice 8

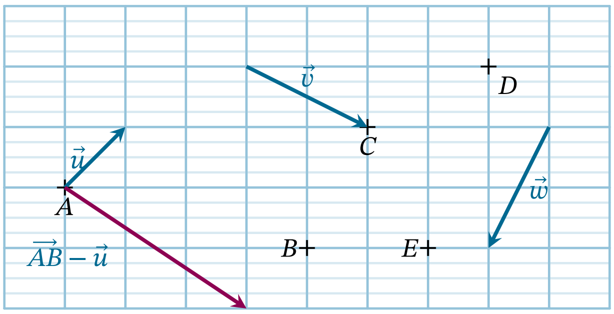
Corrigé de l'exercice 9



Corrigé de l'exercice 10



Corrigé de l'exercice 11



Corrigé de l'exercice 12

Corrigé de l'exercice 13

1) $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$.

2) $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{EH}$.

3) $-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$.

4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$

Corrigé de l'exercice 14

1.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}&=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DM}\\&=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MB}\\&=\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}\\ &= \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}\\ &= \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}\\ &= 2\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

3.

$$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{DM}$$

4.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DB}\\ &= \overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DD}\\ &= \overrightarrow{CB}\\ \vec{0}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{EM}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}\\ &= \overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}\\ &= \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AE}\\ &= \overrightarrow{EE}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}-\overrightarrow{AU}+\overrightarrow{SH}-\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{MU} &= \overrightarrow{UA}+\overrightarrow{SH}+\overrightarrow{TS}+\overrightarrow{MU}\\ &= \overrightarrow{MU}+\overrightarrow{UA}+\overrightarrow{TS}+\overrightarrow{SH}\\ &= \overrightarrow{MA}++\overrightarrow{TH}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 15

1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\\ \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Attention de ne pas partir de l'égalité au démarrage de votre démonstration.
On doit prouver l'égalité, on ne peut donc pas la poser au départ !!
Cela doit être obtenu à la fin du calcul.

2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BE}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} &= \overrightarrow{\mathrm{BE}} + \overrightarrow{\mathrm{EA}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{BA}} \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{FB}} &= \overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{FB}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 16

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{2}(\underbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}}_{=\overrightarrow{BC}}) \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\vec{u}$ est bien colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Explications :
L'idée est de simplifier l'écriture du vecteur $\vec{u}$ pour réussir à l'écrire en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Je sais c'est pas évident mais il faut y arriver.

Corrigé de l'exercice 17

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} \\ &= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \\ &= 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} \\ &= -3(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \\ &= -3\vec{u} \end{aligned}$$

Explications :
L'idée est de simplifier les écritures des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ afin de les écrire en fonction des mêmes vecteurs (ici, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Par conséquent $\vec{v} = -3\vec{u}$ et donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires.

Corrigé de l'exercice 18

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ED} &= 2\overrightarrow{BC} & \\
\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} &= 2\overrightarrow{BC} & \text{Relation de Chasles}\\
\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} &= 2\overrightarrow{BC} & \text{Relation de l'énoncé}\\
\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} &= 2\overrightarrow{BC} & \text{Relation de Chasles}\\
2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} &= 2\overrightarrow{BC} & \\
\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}\vec{0} & & \\
\overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{DC} &
\end{aligned}$$

On en déduit que C est le milieu de $[AC]$.

Corrigé de l'exercice 19

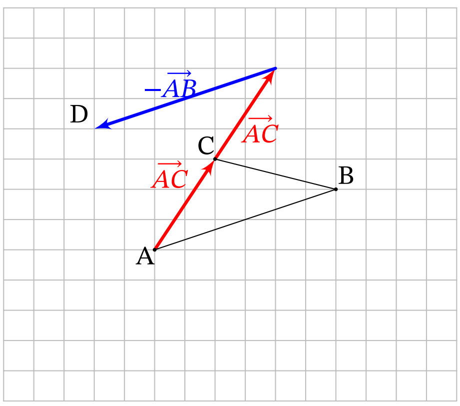
On sait que E est le symétrique de A par rapport à C.
On en déduit que C est milieu de $[EA]$.
On a donc : $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CA}$
ou encore $\overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{EC}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}\\
&= 2\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB}\\
&= 2\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{CD}\\
&= 2\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}\right)\\
&= 2\overrightarrow{ED}
\end{aligned}$$

On a donc montré que D était milieu de $[EB]$, ce qui est équivalent à dire que E est le symétrique de B par rapport à D.

Corrigé de l'exercice 20

1) $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.



2) a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\\
&= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\\
&= -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

3) On déduit des deux égalités vectorielles précédentes que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= 2\left(\underbrace{-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}_{=\overrightarrow{BC}}\right) \\ &= 2\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires car il existe un réel k (ici $k = 2$) tel que $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$.
Les points B, C et D sont alignés.
On en déduit même que le point C est le milieu du segment $[BD]$ car $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.