Cours & méthodes

Vecteurs avec coordonnées

20

Géométrie

1 Coordonnées d'un vecteur :

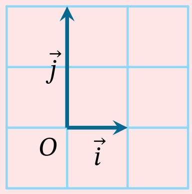
Podcast 1

1.1 Rappels repères, coordonnées :

Définition : Repère orthogonal :

Soit deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et O point du plan.
On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ forme **un repère orthogonal** du plan si :

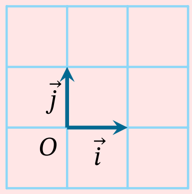
- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ont pas la même norme.



Définition : Repère orthonormé :

Soit deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et O point du plan.
On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ forme **un repère orthonormé** du plan si :

- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.



S'évaluer

QCM n°1 :

Note : ... ...

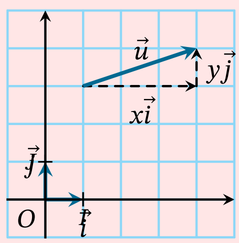
1.2 Lire les coordonnées d'un vecteur :

Propriété : Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tout vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

où x et y sont deux nombres réels.
$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.



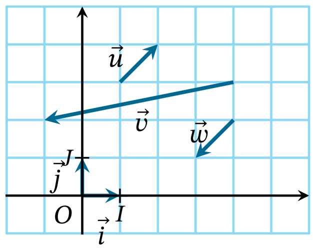
Exemple

Dans notre exemple, on lirait $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Méthode : Lire les coordonnées d'un vecteur

On détermine les coordonnées d'un vecteur, en donnant son déplacement horizontal et vertical, exprimés avec les vecteurs de la base du repère.

Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:



S'évaluer

QCM n°2 :

Note : ... ...

1.3 Construire un vecteur à partir de ses coordonnées

Podcast 2

Attention

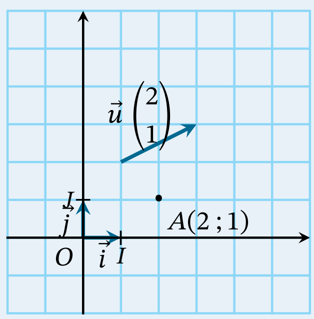
Il ne faut pas confondre les coordonnées d'un point et celles d'un vecteur.
Elles ne représentent pas les mêmes objets :

- Un vecteur mesure un déplacement. Sur un repère on peut en construire autant de représentants que l'on veut.
- Un point est caractérisé par ses coordonnées, qui indiquent sa position par rapport à l'origine du repère. Un point de coordonnées définies est unique.

Pour bien distinguer les deux notions, on écrit souvent horizontalement les coordonnées de point $A(2\,;1)$ et verticalement celles d'un vecteur : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

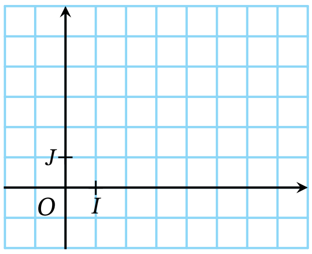
Illustration

- Le point de coordonnées $A(2\,;1)$ est clairement placé dans un repère. Il est géolocalisé par ses coordonnées.
- Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ne mesure qu'un déplacement, ici de deux unités horizontales vers la droite, et une verticale vers le haut.
  On peut tracer autant de représentants de ce vecteur dans un repère.



Méthode : Construire un vecteur à partir de ses coordonnées

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, représenter le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, ayant pour origine le point $A\,(-8;-5)$



Correction Mathalea

S'évaluer

QCM n°3 :

Note : … … … …

1.4 Calculer les coordonnées d'un vecteur :

Podcast 3

Vidéo de cours

Propriété

Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$,
Si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $A\,(x_A;y_A)$ et $B\,(x_B;y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

Démonstration

Soit A, B et M de coordonnées respectives $(x_A;y_A)$, $(x_B;y_B)$ et $(x_M;y_M)$ dans un repère $(O;I,J)$ tels que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ et $OMBA$ est un parallélogramme.
Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont même milieu.

$$\begin{cases}\dfrac{x_A+x_M}{2}=\dfrac{x_B+x_O}{2}\\[2mm]\dfrac{y_A+y_M}{2}=\dfrac{y_B+y_O}{2}\end{cases}\text{ soit }\begin{cases}x_A+x_M=x_B\\y_A+y_M=y_B\end{cases}\text{ soit }\begin{cases}x_M=x_B-x_A\\y_M=y_B-y_A\end{cases}$$

On en déduit que $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ et finalement que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

Remarque

Ces coordonnées correspondent au déplacement horizontal puis vertical pour aller de A à B (affectés de signes).

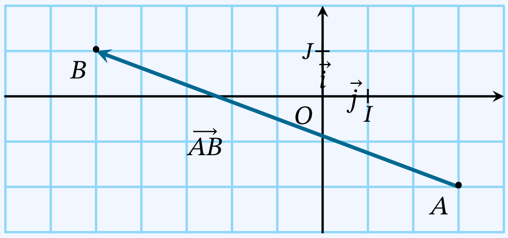
Exemple

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan,
on donne $A(3;-2)$ et $B(-5;1)$:
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5-3 \\ 1-(-2) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Méthode : Calculer les coordonnées d'un vecteur

Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on donne les points suivants :
$R\,(0\,;\,1)$ et $S\,(-1\,;\,4)$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{RS}$.

S'evaluer

QCM n°4 :

Note : ... ...

1.5 Calculer la norme d'un vecteur

Podcast 4

Propriété : Calculer la norme d'un vecteur :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur et un repère (O, I, J).
La norme du vecteur $\vec{u}$ est calculée avec la relation :

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration

La démonstration est la même que celle qui calcule la distance entre deux points, déjà travaillée et s'appuie sur le théorème de Pythagore.

Méthode : Calculer la norme d'un vecteur

Dans un repère orthonormé du plan, on donne $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$.

Déterminer la norme du vecteur $\vec{w}$.
(Donner le résultat sous la forme $\sqrt{a}$ ou d'un nombre entier le cas échéant)

S'évaluer

QCM n°5 :

Note : … … … …

2 Calculer avec les coordonnées de vecteurs

2.1 Égalités vectorielles

Méthode : Calculer les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle simple (Niveau *)

Dans un repère orthonormé (O,I,J), on donne $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et un point $A(-1;-2)$.

Déterminer les coordonnées du point B image de A par la translation de vecteur $\vec{w}$

Correction pdf

2.2 Somme de vecteurs

Propriété : Coordonnée de la somme de deux vecteurs

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

Podcast 5

Vidéo de cours

Méthode : Calculer les coordonnée de la somme de deux vecteurs. (Niveau *)

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les vecteurs suivants :
$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$.

Méthode : Calculer les coordonnées d'un point défini par une somme vectorielle. (Niveau **)

Dans un repère orthogonal $(O;I,J)$, on place les points :
$A(2;3)$,
$B(4;-1)$,
$C(5;3)$
et $D(-2;-1)$.
Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$?

Correction pdf

S'évaluer :

QCM n°6 :

Note : ... ...

2.3 Multiplication par un réel

Podcast 6

Propriété

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et λ un réel. Les coordonnées du vecteur $\lambda\times\vec{u}$ sont $\overrightarrow{\lambda u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$.

Remarque

Si λ est différent de zéro :
$\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ ont la même direction. Leur sens et longueur dépendent de λ. Ce sont des vecteurs colinéaires.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un point définie par une égalité vectorielle (niveau **)

On donne $A(-3;3); B(-1;-1); C(2;-4)$, dans un repère orthonormé (O, I, J).
Calculer les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Correction vidéo

S'évaluer

QCM n°7 :

Note : … … … …

3 Vecteurs colinéaires

3.1 Colinéarité et coordonnées

Propriété : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires,

$\iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, $\iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\begin{cases} x = \lambda x' \\ y = \lambda y'. \end{cases}$

Méthode : Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires avec la définition.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ils colinéaires ?

Correction vidéo

3.2 Déterminant et colinéarité

Définition

On appelle **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre $xy' - x'y$.

On le note :

$$Det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Cours en vidéo

Méthode : Calculer le déterminant de deux vecteurs.

Calculer le déterminant de vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Correction pdf

Propriété : Colinéarité avec le déterminant.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Méthode : Déterminer la colinéarité de deux vecteurs à partir de leur déterminant (Niveau *)

On calcule le déterminant des deux vecteurs. S'il est égal à 0, on peut conclure qu'ils sont colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-ils des vecteurs colinéaires ?

Correction vidéo

S'évaluer

QCM n°8 :

Note : ... ...

3.3 Démontrer avec la colinéarité

Propriété : Prouver l'alignement ou le parallélisme avec la colinéarité.

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles**
  si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Méthode : Prouver l'alignement avec le déterminant.

On utilise la propriété du déterminant pour vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Soit dans un repère orthonormé (O, I, J), les points suivants :
$A(1; 2)$, $B(3; 1)$, $C(5; 3)$ sont-ils alignés ?

Correction vidéo

Méthode : Prouver le parallélisme avec le déterminant.

La méthode est identique à la précédente.

Soit dans un repère orthonormé (O, I, J), les points suivants :
$A(-1; 3)$, $B(2; 4)$, $C(-2; -1)$, $D(4; 1)$.
Démontrer que $ABDC$ est un trapèze