Cours & méthodes

Initiation aux Probabilités :

25
Probabilités

Activité

Activité de départ

Loi des grands nombres

1 Définitions et vocabulaire :

1.1 Expérience aléatoire :

Définition

On appelle expérience aléatoire une expérience :

- Renouvelable
- Ayant des résultats que l'on est capable de décrire.
- Mais dont on re sait pas lequel de ces résultats va se produire quand on la réalise.

Vidéo de cours

Exemple : Exemples classiques d'expériences aléatoires :

- Le lancer d'un dé non pipé (non truqué),
- Tirer une carte au hasard dans un jeu,
- Tirer une boule dans une urne (comme au loto)

Remarque

Dans une expérience aléatoire, on connait les résultats possibles mais on ne sait pas lequel va se produire avant l'expérience réalisée.

1.2 Issues, Univers et événements

Définition

Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelées **issues**.
L'ensemble des éventualités est appelé **univers** ; on le note souvent Ω.
On appelle **événement** d'une expérience aléatoire une partie de l'univers.

Exemple

On lance un dé à 6 faces, et on relève le numéro affiché sur sa face supérieure.
Il s'agit bien d'une **expérience aléatoire**.

- Les **issues** de cette expérience sont : $1; 2; 3; 4; 5; 6$

- **L'univers** de cette expérience aléatoire est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- "*obtenir un 6*" est un **événement** ;

Méthode : Connaître le vocabulaire de base (situation 1) - Niveau *

On tire 3 boules dans un sac contenant trois boules rouges et 3 boules noires et on note à chaque fois la couleur obtenue.

1) Décrire l'univers de cette expérience.
2) L'expérience aurait-elle plus d'issues si on tirait une boule supplémentaire ?

Correction

Méthode : Connaître le vocabulaire de base (situation 2) - Niveau *

On lance simultanément deux dés à six faces.

1) On calcule la somme obtenue. Déterminer l'univers de cette expérience.
2) On calcule le produit obtenu. Déterminer l'univers de cette expérience.

Correction

1.3 Vocabulaire et notation probabiliste :

Définition

- On appelle **événement élémentaire** un événement qui ne contient qu'une seule issue.
- On appelle **évènement contraires** des évènements :
  $\rightarrow$ Ils n'ont aucune issue en commun.
  $\rightarrow$ Ils couvrent tout l'univers.
- On appelle **évènement impossible** un évènement dont les issues ne sont pas dans l'univers.
- On appelle **évènement certain** un évènement dont les issues couvrent tout l'univers.

Exemple

On lance un dé à 6 faces :

- "*Obtenir un 6*" est un événement élémentaire.

- "*Obtenir un 6 ou un 5*" n'est pas un événement élémentaire.
- « *Obtenir un nombre pair* » et « *Obtenir un nombre impair* » sont des **événements contraires**
- « *Obtenir un 8* » est un **événement impossible**.
- « *Obtenir un entier inférieur à 8* » est un **événement certain**.

S'évaluer

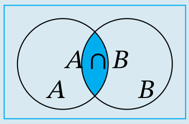
QCM n°1 :

Note : ... ...

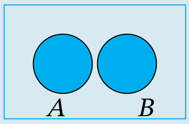
Vidéo de cours

Notations

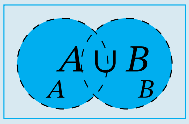
- $A \cap B$=*A et B* :
  Ce sont tous les éléments qui appartiennent **à la fois** à A **et à** B



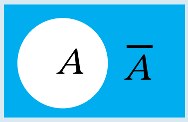
- Si $A \cap B = \varnothing$
  On dit que les évènements A et B sont **incompatibles**.



- $A \cup B = A$ ou B :
  Ce sont tous les éléments qui appartiennent **ou bien à** A *ou* à B.



- $\overline{A}$ = non-A :
  Ce sont tous les éléments qui n'appartiennent pas à A.



Méthode : Connaître et utiliser union et intersection - Niveau *

Dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol. 8 étudient les deux langues.
Pour un élève donné, on note A l'évènement : « *l'élève étudie l'anglais* »
et E l'évènement : « *l'élève étudie l'espagnol* ».

1) Que représente l'événement $A \cap E$?
2) Que représente l'événement $A \cup E$?
3) Combien d'élèves n'apprennent ni l'anglais ni l'espagnol ?
4) Quel est l'événement contraire de A ?

Correction

2 Probabilité d'un événement :

Activité : Approche expérimentale :

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une " *fréquence théorique* " appelée **probabilité**.

Exemple :
Si on lance un dé à six faces un très grand nombre de fois, on obtiendra une fréquence proche de $\frac{1}{6}$ de l'événement "*Obtenir un 6*". La "*fréquence "théorique*" est exactement $\frac{1}{6}$, on a en effet "*1 chance sur 6*" d'obtenir un 6.
La vidéo de début de cours sur "la loi des grands nombres explique cette idée.

2.1 Calcul d'une probabilité :

Définition : Définition fondamentale pour calculer une probabilité.

Pour calculer la probabilité d'un événement A, on peut appliquer la formule suivante :

$$P(A) = \frac{\text{nombres d' issues de l' événement } A}{\text{nombre d'issues de l' expérience}}$$

Vidéo de cours

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
On appelle A l'événement « *obtenir le 8 de cœur*" et B l'événement « *obtenir un as* »

- Le nombres d'issues de l'évènement A est 1 (Il y a un seul 8 de cœur).
- Le nombre d' issues de l'expérience est 32 (il y a 32 cartes)

donc $P(A) = \frac{\text{nombres d' issues de l' événement } A}{\text{nombre d'issues de l'expérience}} = \frac{1}{32}$

de même : $P(B) = \frac{\text{nombres d' issues de l' événement } B}{\text{nombre d'issues de l'expérience}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

Propriété

- La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.
- La probabilité de **l'événement impossible** est 0.
- La probabilité de **l'événement certain** est 1.
- La **somme des probabilités** de tous les **événements élémentaires** est égale à 1 .
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
- Lorsque chaque événement a la même probabilité de se réaliser, on dit que les événements sont **équiprobables**.
- Soit A un événement. On a alors : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 .

- Soit C l'événement : « *obtenir un* 7» $P(C) = \frac{0}{6} = 0$. C est un évènement impossible.
- Soit D l'événement : « obtenir un nombre inférieur à 7» : $P(D) = \frac{6}{6} = 1$. C est un évènement certain.
- « *obtenir 1*» , « *obtenir 2*» , … , « *obtenir 6*» sont les 6 événements élémentaires de l'expérience.
  $P(\text{ obtenir } 1) + P(\text{ obtenir } 2) + P(\text{ obtenir } 3) + P(\text{ obtenir } 4) + P(\text{ obtenir } 5) + P(\text{ obtenir } 6) = \frac{6}{6} = 1$

- Il y a autant de chances de tirer un 1 , un 2 ,... ou un 6. On dit que ce sont des événements équiprobables.
- $\rightarrow$ Soit E l'événement : « *obtenir un 3 ou un 4* » $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

  $\rightarrow$ Soit F l'événement : « *obtenir un 3*». C'est un évènement élémentaire. $P(F) = \frac{1}{6}$

  $\rightarrow$ Soit G l'événement : « *obtenir un 4*». C'est un événement élémentaire. $P(G) = \frac{1}{6}$

  $P(F)+P(G) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ c'est la somme des probabilités élémentaires de E. On vérifie que $P(F)+P(G) = P(E)$
- On appelle l'événement $H = \{\text{obtenir un } 6\}$, on a alors $\overline{H} = \left\{\text{ne pas obtenir un } 6\right\}$ Donc $P(H) = 1-P(\overline{H}) = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Méthode : Calculer une probabilité élémentaire - Niveau *

On joue avec un dé truqué à 6 faces. On lance une fois ce dé. On sait que :
- La probabilité d'obtenir $1, 2, 3, 4$ ou 5 est la même.
- La probabilité d'obtenir un 6 est égale à $\frac{1}{2}$.

1) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 5.
2) Calculer la probabilité d'obtenir 1.
3) Soit A l'événement : « *obtenir un nombre pair* ».
   Déterminer $p(\overline{A})$ et interpréter l'événement $\overline{A}$ et sa probabilité.

Correction

Méthode : Calculer une probabilité élémentaire - Niveau *

Dans une urne, on a placé 9 boules : 5 rouges et 4 noires.
Les boules rouges sont numérotées : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 et les noires : 1 ; 2 ; 3; 3.
Calculer la probabilité des événements suivants :
1) N : « *Tirer une boule noire* » ?
2) A : « *Tire une boule marquée* 1 ».
3) N_3 : « *Tirer une boule noire marquée 3* ».
4) I : « *Tirer une boule marquée d'un nombre impair* ».

Correction

S'évaluer

QCM n°2 :

Note : ... ...

2.2 Relation fondamentale

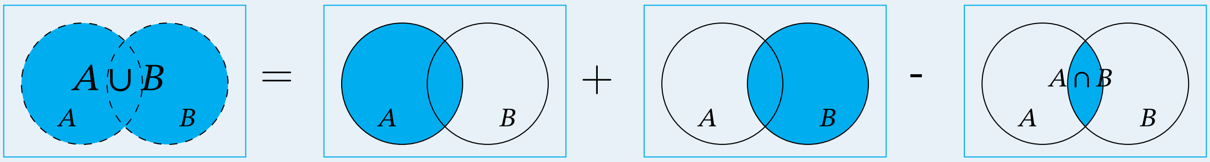
Propriété : Relations entre $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$

Soit A et B deux évènements quelconques d'une expérience aléatoire. On a alors :

$$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Vidéo de cours

Illustration



Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
On appelle A : «*tirer un cœur*» et B : « *tirer un As* »

$$P(A) = \frac{8}{32} \text{ et } P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$A \cup B$ est l'événement avoir un coeur ou un as.
Donc $P(A \cup B) = \frac{11}{32}$ (8 coeurs possibles et 3 as)
$A \cap B$ est l'événement avoir un coeur et un as.
Donc $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ (seulement as de cœur) On vérifie bien que :

$$P(A \cup B) = \frac{11}{32} \text{ et } = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{8}{32} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{8+4-1}{32} = \frac{11}{32}$$

Propriété : Évènements incompatibles
Si A et B sont incompatibles, $p(A \cap B) = 0$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Méthode : Connaître et utiliser la relation fondamentale - Niveau *

Soient A et B deux événements vérifiant :
- $P(A) = 0{,}61$ • $P(B) = 0{,}59$ • $P(A \cup B) = 0{,}71$. Calculer $P(A \cap B)$.

Méthode : Connaître et utiliser la relation fondamentale - Niveau *

Soient A et B deux événements incompatibles vérifiant :
- $P(A) = 0{,}39$ • $P(B) = 0{,}02$. Calculer $P(A \cup B)$.

Méthode : Connaître et utiliser la relation fondamentale - Niveau *

Soient A et B deux événements vérifiant :
- $P(\overline{A}) = 0{,}43$ • $P(\overline{B}) = 0{,}19$ • $P(A \cap B) = 0{,}49$. Calculer $P(A \cup B)$.

Méthode : Connaître et utiliser la relation fondamentale - Niveau *

Voici un tableau d'effectifs concernant deux événements A et B. Calculer $P(A \cup B)$.

	A	$\overline{A}$	Total
B	59	6	65
$\overline{B}$	19	16	35
Total	78	22	100

S'évaluer :

QCM n°3 :

Note : … … … …

2.3 Expériences successives

Exemple

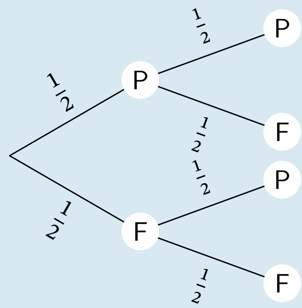
On lance une pièce de monnaie plusieurs fois et on relève Pile ou Face à chaque tirage

1) Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois Pile en deux tirages ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois pile en trois tirages ?

Vidéo de cours **Correction rédigée**

Notations : Arbre pondéré

Quand on procède à des répétitions d'épreuves, on utilise souvent un arbre pondéré comme celui-ci :

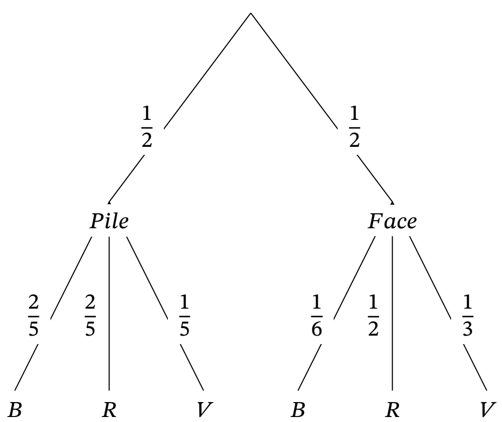


Propriété : Hors programme mais intuitif et pratique !!

Dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin, est égale au produit des probabilités qui le composent.

Méthode : Utiliser un arbre pondéré - Niveau *

On lance une pièce équilibrée.
Si la pièce tombe sur 'Pile', on tire une boule dans une urne contenant 2 boules bleues, 2 boules rouges, et 1 boule verte.
Si la pièce tombe sur 'Face', on tire une boule dans une urne contenant 1 boule bleue, 3 boules rouges, et 2 boules vertes.
On a représenté l'expérience par l'arbre ci-dessous



Donner la probabilité d'obtenir une boule rouge.
