Cours & méthodes

Fonctions affines

21
Analyse

1 Reconnaître et utiliser une fonction affine

Définition

On appelle **fonction affine** toute fonction f qui s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres fixés.
On pourra aussi noter $f(x) = mx + p$, où m et p sont des nombres fixés, selon les situations.

Le cours en vidéo

S'évaluer

QCM n°1 :

Note : ... ...

Exemple

- $f(x) = 3x + 2$ ici $a = 3$ et $b = 2$
- $f(x) = -4x + 1$ ici $a = -4$ et $b = 1$
- $f(x) = 3x^2 + 2$ Ce n'est pas une fonction affine, il y a un terme de degré 2..

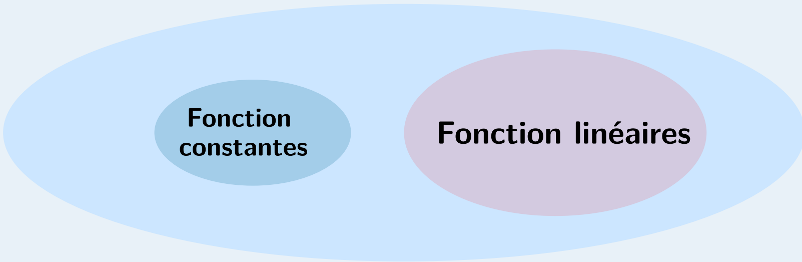
Cas particulier

- Si $a = 0$: $f(x) = 0 \times x + b = b$
  On appelle cette famille de fonctions des **fonctions constantes**.
  Exemple : $f(x) = 4$ alors : $f(3) = 4 \quad f(-5) = 4$ etc....
- Si $b = 0$: La fonction affine s'écrit : $f(x) = a \times x + 0 = ax$
  On appelle cette famille de fonctions des **fonctions linéaires**.
  Exemples :
  $f(x) = 2x$ est la fonction linéaire de coefficient 2
  $f(x) = -4x$ est la fonction linéaire de coefficient -4

Illustration

On peut schématiser la situation ainsi :
Les Fonctions Linéaires et les fonctions constantes, sont chacune des sous-ensembles des fonctions affines.

Fonction affines



Méthode : Déterminer une fonction affine à partir de deux images. Niveau *

Soit f la fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Déterminer, en expliquant, selon les cas, si f est, ou non, une fonction affine.

1) $f(x) = 5 + 2x$.
2) $f(x) = \dfrac{1}{7x+9}$.
3) $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{5}$.
4) $f(x) = 7x + 8$
5) $f(x) = -5x^2 + 5$.

Correction

S'évaluer

QCM n°2 :

Note : … … … …

2 Propriété des fonctions affines :

Exemple

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1$
On donne son tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	8	10	13
$f(x) = 3x + 1$	...	...	...	...	...	...	...

Le cours en vidéo

1) **Est-ce un tableau de proportionnalité ?**

2) Compléter :

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \text{.................}$$

$$\frac{f(10) - f(2)}{10 - 2} = \text{.................}$$

3) **Que peut-on remarquer ?**
On dit que ....

Propriété : Accroissements constants

f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, si et seulement si :
pour tout réels u et v distincts,

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$$

On dit que **l'accroissement est constant** pour une fonction affine.

Démonstration

Remarque : Pour montrer qu'il y a équivalence entre les deux propositions :
"f est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$" et "On suppose que, pour tout $x \neq u$, $\dfrac{f(x) - f(u)}{x - u}$ est constant."
on est obligés d'effectuer la démonstration "dans les deux sens".

Pour schématiser :
Quand on doit démontrer $A \iff B$, on procède souvent de la sorte :
On commence par démontrer $A \Rightarrow B$ (Implication) puis $B \Rightarrow A$ (Réciproque).

- **Implication :**
  on suppose que f est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$.
  $f(u) = au + b$ et $f(v) = av + b$
  donc, si $u \neq v$,
  $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} = \dfrac{(au + b) - (av + b)}{u - v} = \dfrac{au + b - av - b}{u - v} = \dfrac{a(u - v)}{u - v} = a.$
  Le taux d'accroissement est bien constant.

- **Réciproque** :
  Soit u un réel.
  On suppose que, pour tout $x \neq u$, $\dfrac{f(x) - f(u)}{x - u}$ est constant.
  Pour tout $x \neq u$, appelons a le nombre :$a = \dfrac{f(x) - f(u)}{x - u}$
  On a $a = \dfrac{f(x) - f(u)}{x - u} \iff f(x) - f(u) = a(x - u) \iff f(x) = ax - au + f(u).$
  Appelons b le réel : $b = -au + f(u)$.
  On a alors montré que : $f(x) = ax + b$
  f est donc une fonction affine.

S'évaluer

QCM n°3 :

Note : ... ...

Méthode : Déterminer une fonction affine à partir de deux images. Niveau **

Déterminer la fonction affine f qui vérifie $f(-1) = 5$ et $f(2) = 1$

Correction en vidéo

3 Représenter graphiquement une fonction affine :

Propriété

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Correction en vidéo

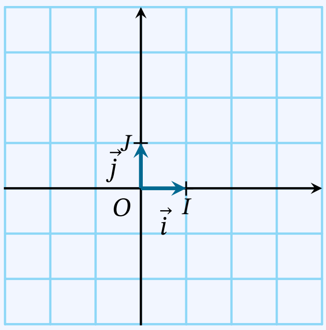
Exemple : Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$

f est une fonction affine
donc sa représentation graphique est une droite (d).

On cherche deux points :

$f(0) = \ldots$ donc $A(\ldots\ ;\ \ldots) \in (d)$

$f(-1) = \ldots$ donc $B(\ldots;\ldots) \in (d)$



S'évaluer

QCM n°4 :

Note : … … … …

Propriété : Propriétés graphiques :

Si f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

- a est appelé le **coefficient directeur** de la droite, il mesure sa pente.
- b est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite.
  Il mesure « l'étage» où la droite coupe d'axe des ordonnées.
  Le point de coordonnées $(0; b)$ appartient à la droite.

Cours en vidéo

Propriété : Fonctions affines, fonctions linéaire, constantes et représentations graphiques.

- Une droite "oblique" du plan est la représentation graphique d'une fonction affine.
- Une droite "oblique" du plan qui passe par l'origine est la représentation graphique d'une fonction linéaire.
- Une droite "horizontale" du plan est la représentation graphique d'une fonction constante.

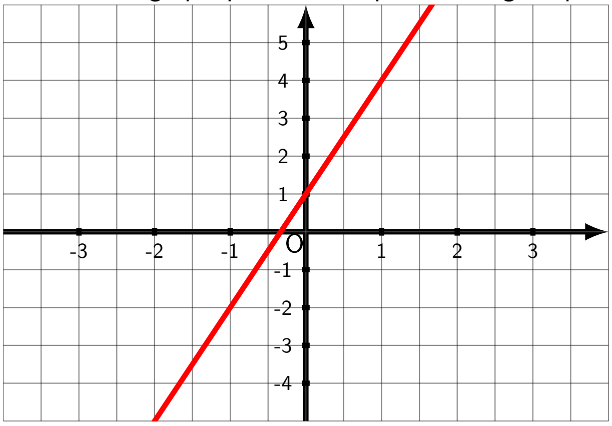
S'évaluer

QCM n°5 :

Note : … … … …

Méthode : Déterminer une fonction affine à partir de sa représentation graphique. Niveau *

Déterminer graphiquement l'expression algébrique de la fonction affine f représentée ci-dessous :



Correction MathALEA

- -

- -

S'évaluer

QCM n°6 :

Note : … … … …

4 Déterminer le sens de variation d'une fonction affine

Observation graphique :

Propriété

Le paramètre a d'une fonction affine étant le coefficient directeur de sa droite représentative, on en déduit que :

1) la droite "*monte*" quand a est positif
2) la droite "*descend*" quand a est négatif.

Cours en vidéo

Propriété

Le sens de variation d'une fonction affine f de la forme $f(x) = ax + b$ est donné par le signe de a :

- Si $a > 0, f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Si $a < 0, f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Démonstration

On se donne deux nombres u et v distincts, tels que $u < v$
On va comparer $f(u)$ et $f(v)$ pour déterminer si f est croissante ou décroissante.
On calcule

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &= av + b - (au + b) \\ &= av + b - au - b \\ &= av - au \\ &= a(v - u) \end{aligned}$$

On sait que $v - u > 0$ puisqu'on a choisi $u < v$
$f(v) - f(u)$ est donc du signe de a.
Conclusion :

- Si $a > 0$ alors $f(v) - f(u) > 0$ et $f(v) > f(u)$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Si $a < 0$ alors $f(v) - f(u) < 0$ et $f(v) < f(u)$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Méthode : Déterminer le sens de variations d'une fonction affine. Niveau *

1) Dresser le tableau de variations de la fonction h définie sur $[0\,;\,7]$ par $h(x) = -7 - 3x$.

2) Déterminer le sens de variation de la fonction w définie sur $\mathbb{R}$ par $w(x) = \dfrac{-5 + 3x}{4}$.

Correction MathALEA

S'évaluer

QCM n°7 :

Note : ... ...