Cours & méthodes

Equations réduites de droites

23

Analyse

1 Fonction affine et équation de droite

Podcast 1

Propriété

La représentation graphique d'une fonction affine du type $f(x) = mx + p$ est une droite non parallèle à l'axe de ordonnées.

Propriété

Soit $(x; y)$ sont les coordonnées d'un point M appartenant à la droite (d) : $y = mx + p$.
On a l'équivalence : $M(x; y) \in (d) \iff y = mx + p$

Vidéo de cours

Fonction affine $f(x) = mx + p$

$\updownarrow$

Droite non parallèle à l'axe des ordonnées d'équation : $y = mx + p$.

Podcast 2

Remarque

- Pour les fonctions affines, on peut parler de $f(x) = ax + b$ ou $f(x) = mx + p$, selon les livres, cours, profs...
  Cela n'a pas d'importance.
  Par contre, pour les équations de droites, au lycée, on s'accorde à utiliser l'écriture $y = mx + p$ et non pas $y = ax + b$ qui amènerait à des confusions en fin de chapitre.
- **Pourquoi parle-t-on d'*une droite non parallèle à l'axe de ordonnées*?**
  Rappelez-vous, une fonction associe une unique image à chaque antécédent.
  Graphiquement, à chaque abscisse, il ne peut y avoir qu'un point de la courbe.
  Il n'est donc pas possible que la représentation graphique d'une fonction soit une droite verticale.

S'évaluer

QCM n°1 :

Note : ... ...

2 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Définition

Si (d) est une droite d'équation $y = mx + p$.
On appelle : m le **coefficient directeur** de la droite et p **l'ordonnée à l'origine**.

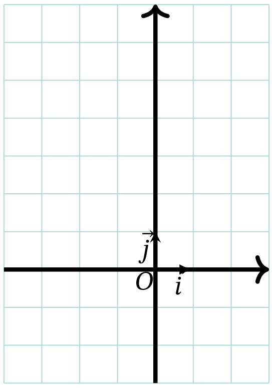
Exemple

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 2x - 3$.
Sa représentation graphique est la droite (d) d'équation : $(d)\,:\, y = 2x - 3$
Son coefficient directeur vaut $m = 2$ et son ordonnée à l'origine vaut : $p = -3$.

Méthode : Tracer une droite d'équation $y = mx + p$

Il suffit de déterminer les coordonnées de deux points.

Tracer la droite (d) d'équation $y = 2x + 3$



Vidéo
de cours

Propriété : Propriété graphique

Si (d) est une droite d' équation $y = mx + p$ alors :

- m est le **coefficient directeur**.
  Il mesure la pente de la droite c'est à dire l'inclinaison par rapport à l'horizontal (axe des abscisses).
  Graphiquement, cela correspond au quotient :

$$m = \frac{\text{Dénivelé vertical}}{\text{Distance horizontale}}$$

- p est appelé l'**ordonnée à l'origine**.
  Il mesure "l'étage" où la droite coupe l'axe des ordonnées.

Vidéo
de cours

Podcast 3

Remarque

A la physicienne : Les physiciens notent souvent avec la lettre Δ (Delta en grec) une différence, un écart.
Quand on mesure quelque chose et qu'on est surpris par l'écart avec ce qu'on espérait trouver, on dit souvent "il y a un *delta* important".
Dans notre situation, on peut noter :

$$m = \frac{\Delta\ y}{\Delta\ x}$$

où $\Delta\ x$ mesure l'écart horizontal, et $\Delta\ y$ l'écart vertical.

Méthode : Lire m et p à partir de la représentation graphique d'une droite oblique.

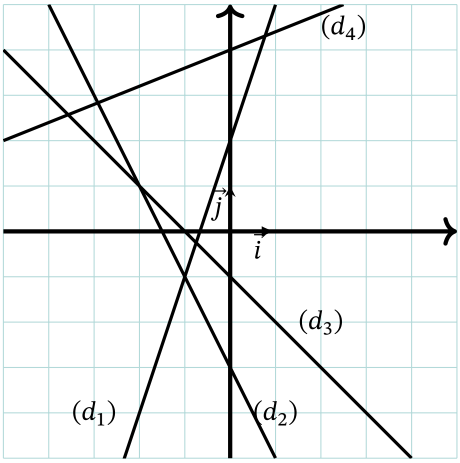
Pour lire l'ordonnée à l'origine :
On lit l'ordonnée du point de la droite qui est sur l'axe des ordonnées.

Pour lire le coefficient directeur :

A partir d'un point quelconque de la droite :

- On se déplace d'**une unité horizontalement sur la droite**,
- Le coefficient directeur vaut **la mesure algébrique de la distance à la droite**.

Lire à partir des représentations graphiques ci-contre, les ordonnées à l'origine , puis les coefficients directeurs et en déduire chaque équation réduite.



Correction en cours

Remarque

On parle de "**mesure algébrique**" pour signifier que si on monte la distance sera positive, mais que si on descend, la "distance" sera négative.

S'évaluer

QCM n°2 :

Note : … … … …

3 Calcul du coefficient directeur.

Propriété

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ (avec $x_A \neq x_B$) ,
i.e. la droite (AB) est non parallèle à l'axe des ordonnées)
La droite (AB) a pour coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Vidéo de cours

Remarque

C'est la même formule que celle déterminée pour une fonction affine :

$$m = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \quad \text{pour } u \neq v$$

Méthode : Calculer un coefficient directeur à partir de deux points.

Soit $(O, \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthogonal.
Déterminer, s'il existe et en l'expliquant, le coefficient directeur de la droite (AB) avec $A(4; -1)$ et $B(-4; 1)$.

Correction

S'évaluer

QCM n°3 :

Note : … … … …

4 Déterminer une équation réduite de droite.

Méthode : Déterminer une équation réduite de droite à partir de deux points. (1er cas)

Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points $A(2; -6)$ et $B(-4; 6)$.

Correction en cours

S'évaluer

QCM n°4 :

Note : … … … …

5 Droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Propriété

Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées ne peut être la représentation graphique d'une fonction, puisqu'un antécédent ne peut avoir plusieurs images.

Vidéo de cours Podcast 4

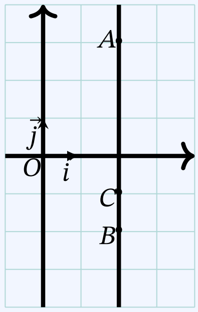
Remarque

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne peut pas s'écrire sous la forme $y = mx + p$
L'ensemble des points de cette droite ont en commun la même abscisse.

Exemple

On trace une droite (d) parallèle aux ordonnées.
On observe que :
$A(2;3) \in (d)$; $B(2;-2) \in (d)$; $C(2;-1) \in (d)$

Tous les points de cette droite ont comme abscisse 2.
Une équation de cette droite se résume donc en : $x = 2$

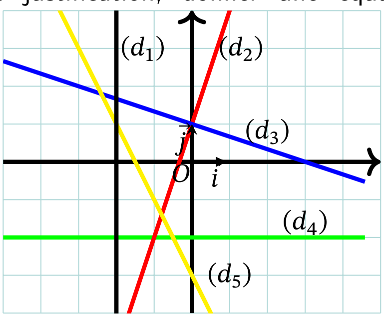


Propriété

Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées à une équation du type $x = a$, avec a l'abscisse commune à tous les points de la droite.

Méthode : Lire des équations de droites.

Sans justification, donner une équation réduite des 5 droites tracées dans le repère ci-contre :



Correction en vidéo

Méthode : Déterminer une équation réduite de droite à partir de deux points. (2ème cas)

Attention au cas particulier !!

Déterminer l'équation de la droite passant par les points $C(3;3)$ et $D(3;7)$.

Correction en vidéo

S'évaluer

QCM n°5 :

Note : … … … …

6 Vecteur directeur d'une droite

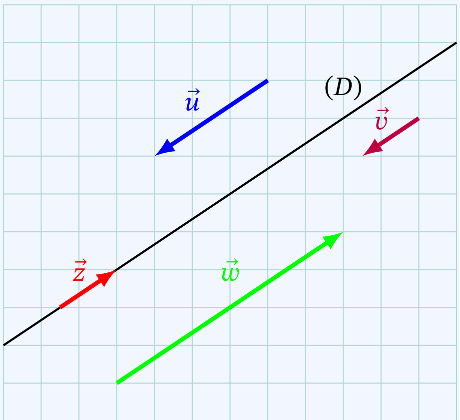
Définition

Si (D) est une droite du plan, on appelle vecteur directeur de (D), tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (D).

Podcast 5

Exemple

Dans cette situation, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ont tous la même direction que la droite (D). Ils sont **colinéaires**.
Ils "portent" cette droite, ce sont tous des **vecteurs directeurs** de la droite (D).



Remarque

Une droite possède une infinité de vecteur directeur.

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan .
$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

Propriété

Une droite d'équation $y = mx + p$ possède comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$

Une droite d'équation $x = a$ possède comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Démonstration

Soit (D) une droite d'équation $y = mx + p$.
En posant $x = 0$, puis $x = 1$, on obtient $(A(0; p)$ et $B(1; m + p)$ deux points de la droite (D)
$\overrightarrow{AB}$ est alors un vecteur directeur de la droite (D)
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} \iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$
On procède de même pour une équation verticale.

Méthode : Utiliser les vecteur directeur avec une équation réduite de droite

Soit (d) la droite d'équation $y = -3x + 2$.
Déterminer un vecteur $\vec{u}$, directeur de cette droite.
Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$ est-il un vecteur directeur de (d) ?

S'évaluer

QCM n°6 :

Note : ... ...

7 Droites parallèles, droites sécantes et points alignés.

Propriété : Parallélisme et coefficient directeur

Dans un repère, la droite (d) a pour équation réduite $y = mx + p$ et la droite (d') a pour équation réduite $y = m'x + p'$

- $(d) \parallel (d') \iff m = m'$
- (d) et (d') sécantes $\iff m \neq m'$

Vidéo de cours Podcast 6

Démonstration

On considère les points A et B de coordonnées respectives $(0; p)$ et $(1; m + p)$.
Ces deux points appartiennent à la droite (d) car :
$m \times x_A + p = m \times 0 + p = p = y_A$ et $m \times x_B + p = m + p = y_B$.
De même, les points A' et B' de coordonnées respectives $(0; p')$ et $(1; m' + p')$ appartiennent à la droite $(d)'$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d)

et le vecteur $A'B'$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ est vecteur directeur de (d').

Les deux droites sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $A'B'$ ont la même direction c'est à dire sont colinéaires c'est à dire encore si et seulement si $1 \times m - 1 \times m' = 0$ ce qui s'écrit finalement $m = m'$.

Propriété : Autre formulation du théorème

Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Méthode : Démontrer que des droites sont parallèles.

On donne dans un repère les équations de droites suivantes :
(d_1) : $y = 2x + 3$; (d_2) : $y = -2x + 3$; (d_3) : $x = 7$;
(d_4) : $2y = 4x + 8$; (d_5) : $y + 2x = 5$
Déterminer, en justifiant, quelles droites sont parallèles entre-elles ?

Correction

Propriété : Établir que trois points sont alignés, non alignés

On dit que 3 points A, B et C sont alignés
si et seulement si les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.

Cours en vidéo

Méthode : Établir que trois points sont alignés ou non alignés

Dans un repère orthonormé, on donne trois points :
$M(-1;4)$; $N(3;-4)$ et $P(2;-2)$.
Les points M, N et P sont-ils alignés ?

Correction

S'évaluer

QCM n°7 :

Note : ... ...