Cours & méthodes

Équations cartésiennes de droites

24

GEOMETRIE

1 Définition

Définition

On appelle équation générale ou **équation cartésienne** d'une droite, une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

où a et b ne pouvant pas être nuls en même temps.

Démonstration en vidéo

Podcast 1

Démonstration : Démonstration Fondamentale :

La démonstration proposée en vidéo est importante pour ceux qui suivent bien en maths, qui envisagent la spé maths.

Exemple : *

- $3x + 4y - 5 = 0$ est une équation cartésienne de droite, de coefficients : $a = 3$; $b = 4$ et $c = -5$.
- Si $a = 0$, alors l'équation est sous la forme : $by + c = 0 \iff y = -\dfrac{c}{b}$ et b ne peut pas être nul lui aussi. C'est une droite horizontale.
- Si $b = 0$, alors l'équation est sous la forme : $ax + c = 0 \iff x = -\dfrac{c}{a}$ et a ne peut pas être nul lui aussi. C'est une droite verticale.

Méthode : Passer d'une forme à une autre.

Soit, dans un repère orthonormé :
(d_1) la droite d'équation $y = -3x + 1$
(d_2) la droite d'équation $x = -4$.
(d_3) la droite d'équation $3x + 2y - 4 = 0$.
Donner une équation cartésienne de (d_1) et (d_2) et une équation réduite de (d_3).

Correction pdf

Remarque

Une droite admet une infinité d'équation cartésienne.

Exemple

Soit (d) : $2x+3y-4=0$ une équation cartésienne d'une droite (d).
On a alors aussi : (d) : $4x+6y-8=0$ en multipliant chaque membre par 2.
et (d) : $-6x-9y+12=0$ en multipliant chaque membre par -3.
Il n'y a donc pas unicité de l'écriture d'une équation cartésienne, contrairement à une équation réduite.

S'évaluer :

QCM n°1

2 Vecteur directeur et cartésienne.

Propriété : Vecteur directeur d'une droite.

Soit (d) une droite du plan d'équation : (d) : $ax+by+c=0$ avec $(a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)$
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d)

Podcast 7

Exemple

Soit (d) la droite d'équation (d) : $2x+3y-5=0$. $a=2$ et $b=3$ donc (d) admet pour vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}$

Méthode : Déterminer une équation de droite avec un point et un vecteur directeur.

Il y a deux méthodes possibles. Cet exercice est donc corrigé deux fois.
La première idée est de prendre un point $M(x;y)$ sur la droite (d).
$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ seront colinéaires, donc leur déterminant sera nul.

Soit $A(3;-2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$ respectivement un point et un vecteur d'un plan muni d'un repère orthonormé.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par A et ayant $\vec{u}$ comme vecteur directeur.

Correction

Méthode : Déterminer une équation de droite avec un point et un vecteur directeur.

L'idée de cette deuxième méthode est d'utiliser la propriété du vecteur directeur dans l'équation cartésienne.

Soit $A(3;-2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ respectivement un point et un vecteur d'un plan muni d'un repère orthonormé.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par A et ayant $\vec{u}$ comme vecteur directeur.

Correction

3 Déterminer une équation cartésienne de droite à partir de deux points.

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir de deux points.

Ici aussi il y a les deux mêmes méthodes. Commençons par celle du déterminant :

Soit $A(3;2)$ et $B(1;4)$ deux points d'un plan muni d'un repère orthonormé.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

Correction

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir de deux points.

Utilisons ici la méthode du vecteur directeur :

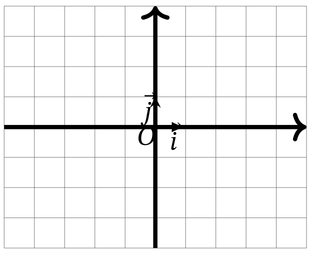
Soit $A(3;2)$ et $B(1;4)$ deux points d'un plan muni d'un repère orthonormé.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

Correction

4 Tracer une droite à partir de son équation cartésienne

Méthode : Représenter une droite à partir de son équation cartésienne

Représenter la droite (d) d'équation $3x-2y+5=0$ dans ce repère orthonormé.



Correction

S'évaluer

QCM n°2 :

Note : … … … …

5 Droites parallèles et droites sécantes

Propriété

Dans un repère orthonormé :
Soit la droite (d) d' équation $ax+by+c=0$ et la droite (d') d' équation $a'x+b'y+c'=0$ avec les $(a;b)\neq(0;0)$ et $(a';b')\neq(0;0)$.
On a alors :

$$(d) \parallel (d') \iff ab'-a'b=0$$

Démonstration

La droite (d) d' équation $ax + by + c = 0$ admet $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

De même, la droite (d') d' équation $a'x + b'y + c' = 0$ admet $\vec{v}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$.

Si $(d) \parallel (d')$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc $Det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ donc $ab' - a'b = 0$.
Réciproquement, si $ab' - a'b = 0$ alors $Det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $(d) \parallel (d')$

Méthode

Soit (d_1) la droite d'équation : $3x - 2y + 4 = 0$
et (d_2) la droite d'équation : $-6x + 4y - 1 = 0$.
Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ?

Correction

Méthode

Il s'agit de refaire la démonstration, pour s'épargner d'apprendre la propriété précédente par cœur.

Soit (d_1) la droite d'équation : $3x - 2y + 4 = 0$
et (d_2) la droite d'équation : $-6x + 4y - 1 = 0$.
Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ?

Correction