Parcours d'exercices

Fonction exponentielle

Etude de fonctions

13

ANALYSE

1 Calcul de dérivées

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2\mathrm{e}^x$
2) $g(x) = 2x + \mathrm{e}^x$
3) $i(x) = \left(x^2 + 3x + 5\right)\mathrm{e}^x$.
4) $j(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

Exercice 2

Calculer la dérivée de f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = (-\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x + 3)$

2 Résoudre des équations :

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\mathrm{e}^x = 1$ 2) $\mathrm{e}^x = 0$ 3) $e^x + 1 = 0$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-4x} - 1 = 0$$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\mathrm{e}^{5x+1} = \mathrm{e}^{2x}$ 2) $\mathrm{e}^{3x+1} = 1$ 3) $\dfrac{e^{1-3x}}{e} = 1$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(3x-5)(\mathrm{e}^x + 2) = 0$ 2) $4\mathrm{e}^{-x} + 7x\mathrm{e}^{-x} = 0$

Exercice 8

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$X^2 + 6X - 7 = 0$
2) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$\mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^x - 7 = 0$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^x - 4 = 0$ 2) $\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x + 3 = 0$

3 Résoudre des inéquations :

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\mathrm{e}^{2x-4} \geqslant 1$ 2) $e^{x^2-3x+5} < \mathrm{e}$ 3) $\left(\mathrm{e}^{3x+1}\right)^2 < 0$

Exercice 11

Démontrer que pour tout réel x,
$-2e^{2x} + e^x + 1 = (2e^x + 1)(1 - e^x)$
En déduire le signe de $-2e^{2x} + e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

Étudier le signe de l'expression $(2x+6)e^{x^2+6x+2}$.

Exercice 13

Déterminer le signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

- $A(x) = 1 - \mathrm{e}^x$
- $B(x) = \mathrm{e}^{2x} - 1$
- $C(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x+1}$
- $D = \mathrm{e}^{(x^2)} - \mathrm{e}^x$
- $E = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

4 Calcul de dérivées de e^u

Exercice 14

Calculer la dérivée de

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

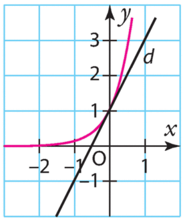
Exercice 15

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $h(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$
2) $k(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{\mathrm{e}^x}$.
3) $l(x) = 10\mathrm{e}^{-0,5x+1}$.
4) $m(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-0,1x}$.
5) $n(x) = \mathrm{e}^{-x^2+x}$

Exercice 16

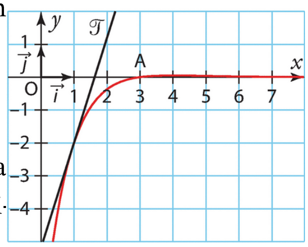
f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont voici la courbe représentative dans un repère. La tangente à la courbe au point A est la droite (d).



1) Déterminer $f'(0)$.
2) f a une expression de la forme $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$.
   a) Déterminer une expression de $f'(x)$ en fonction de x et de k.
   b) En déduire la valeur de k.

Exercice 17

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \dfrac{ax+b}{\mathrm{e}^x}$
où a et b sont deux réels.
Sa courbe représentative a été tracée dans le repère ci-contre.



La courbe $\mathcal{C}_f$ de f passe par le point A(3; 0) et la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a été tracée dans le repère.

1) Déterminer la valeur de a et de b.
2) Étudier les variations de la fonction f.
3) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 .

5 Sujets E3C- Problèmes

Exercice 18

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 3 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 1}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer une expression de $f'(x)$.
2) Déterminer le sens de variation de f.
3) $\mathcal{C}_f$ admet-elle une tangente horizontale ?
4) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d d'équation $y = x + 3$.

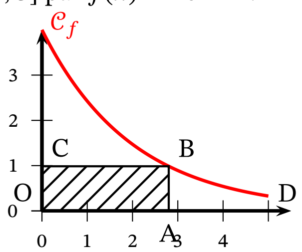
Exercice 19

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin anti-pelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :
$R(x) = (5x - 30)\mathrm{e}^{-0,25x}$, pour tout réel $x \in [2\,;\,20]$.

1) Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.
2) Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).
3) Résoudre l'inéquation $R(x) \geqslant 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4) On note R' la dérivée de la fonction R.
   Un logiciel de calcul formel donne :
   $R'(x) = (-1,25x + 12,5)\mathrm{e}^{-0,25x}$.
   En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

Exercice 20

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.
Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 5$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = 4\mathrm{e}^{-0,5x}$.



L'enclos est représenté par le rectangle $OABC$ où O est l'origine du repère et B un point de $\mathcal{C}_f$, A et C étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées $(5\,;\,0)$.
Le but de l'exercice est de déterminer la position du point A sur le segment $[OD]$ permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.

1) Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2, est donnée en fonction de x par $g(x) = 4x\mathrm{e}^{-0,5x}$ pour x dans l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2) La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,5]$. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,5]$, on a $g'(x) = (4 - 2x)\mathrm{e}^{-0,5x}$.
3) En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;\,5]$.
4) Où doit-on placer le point A sur $[OD]$ pour obtenir une superficie d'enclos maximale ?
   Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm^2.