Parcours d'exercices

Fonction exponentielle

12

ANALYSE

Exercice 1 : Activité d'introduction

1) Cherchez une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f'(x)$.
2) Pour complexifier un peu, cherchez une fonction qui vérifie en plus $f(0) = 1$.

Exercice 2 : Activité d'introduction

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = \mathbf{1}$.

1) Montrer que f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.
   On pourra utiliser la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) \times f(-x)$ et étudier ses variations.
2) Montrer qu'il existe au maximum une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
   On supposera qu'il existe une autre fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$. On étudiera les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \frac{f}{g}$.
3) On admet l'existence d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
   a) Cette fonction est appelée fonction **exponentielle**.
      On la note exp et aussi $\exp(x) = e^x$.
   b) D'après cet exercice, écrire ce que l'on sait sur e^x ?

Correction en vidéo

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \exp(3) \times \exp(4)$
- $B = \dfrac{\exp(-5)}{\exp(2)}$
- $C = [\exp(5)]^3$
- $D = \dfrac{1}{\exp(\,-1)}$
- $E = \exp(-2) \times \exp(4)$
- $F = \dfrac{\exp(5x+7) \times \exp(-x)}{\exp(2x+3)}$

Exercice 4

Calculer :

$A = \mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{-1}$

$B = \dfrac{\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^2}$

Correction en vidéo

Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-4}$
- $B = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{-5}\right)^2}{\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-6}}$
- $C = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$
- $D = \left(\mathrm{e}^{3x+2}\right)^2$
- $E = \mathrm{e}^{2x+1} \times \mathrm{e}^{-3x+5}$
- $F = \dfrac{\mathrm{e}^{-x+1}}{\mathrm{e}^{3x-4}}$
- $G = \dfrac{\mathrm{e}^{x-7}}{\mathrm{e}^{2x}} \times \dfrac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{-2x+1}}$

Accès aux corrections

Exercice 6

Calculer :

$A = \left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right)^2$

$B = \left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x\right)^2$

Correction en vidéo

Exercice 7

Montrer que pour tout réel x, on a

1) $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{x+1}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$
2) $1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$
3) $\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$

Exercice 8

Développer et simplifier les expressions suivantes :

1) $e^x\,(e^x + 5)$
2) $(e^x + 2)\,(e^x + 5)$
3) $(e^x - 2)^2$
4) $\mathrm{e}^{-x}\,(\mathrm{e}^x - 2)$
5) $(\mathrm{e}^x - 1)\,(\mathrm{e}^{-x} + 3)$
6) $(\mathrm{e}^x + 1)^2$
7) $\mathrm{e}^{2x}\,(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$
8) $(\mathrm{e}^x + 1)\,(2 - \mathrm{e}^{-x})$
9) $(\mathrm{e}^x - 3)\,(\mathrm{e}^x + 3)$

Exercice 9

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 1}$.

Démontrer que $f(x) + f(-x) = 2$