Cours & méthodes

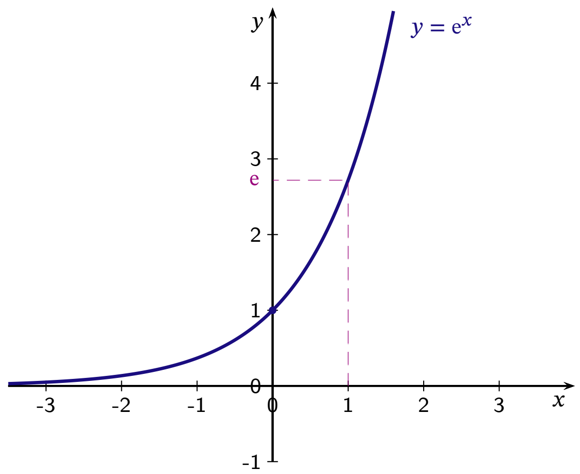
Fonction exponentielle : Étude de la fonction

13 ANALYSE

1 Représentation graphique

Podcast

On peut utiliser un logiciel de géométrie ou une calculatrice pour obtenir la représentation graphique de la fonction exponentielle.



On vérifie que la fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ mais que les images sont strictement positives.

2 Dérivée de l'exponentielle

Propriété

Par définition, on a choisi la fonction exponentielle pour qu'elle soit égale à sa dérivée.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(e^x)' = e^x$$

On ne peut pas faire plus simple !!

Preuve en vidéo

Méthode : Calculer des dérivées de fonctions exponentielles :

Les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{4}{e^x + 1} \quad ; \quad g(x) = \frac{e^x + 1}{4} \quad ; \quad h(x) = \frac{4}{e^x}$$

Calculer leur fonction dérivée.

3 Sens de variation de la fonction exp

Propriété : Variations :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		
$f(x)$	0	1	e	$+\infty$

Démonstration

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Or pour tout nombre réel $x, \exp(x) > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode : Étudier une fonction exponentielle

Soit h la définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 1}$.

Étudier les variations de h.

4 Dérivée de e^u

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur I.
Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = e^u$ est dérivable et on a :

$$f = u'e^u$$

Méthode : Calculer la dérivée de e^u

Calculer la dérivée de la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = e^{x^2}$

S'évaluer :

QCM n°1

5 Résolution d'équations et d'inéquations :

5.1 Résoudre des équations avec les exponentielles

Podcast

Propriété

Pour tous nombres réels a et b : $e^a = e^b \iff a = b$

Remarque

Cette propriété peut sembler triviale mais il n'en est rien. Par exemple, elle n'est pas vérifie pour la fonction carrée : $(-3)^2 = 3^2$ mais on a pourtant $-3 \neq 3$
Pour tous nombres réels a et b, on a donc $a^2 = b^2$ n'est pas équivalent à $a = b$
Cette propriété vérifiée par la fonction exponentielle est liée à la monotonie sur $\mathbb{R}$ de cette fonction.

Méthode : Résoudre des équations avec des exponentielles.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{x+1} = 1$

Méthode : Résoudre des équations avec des exponentielles.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2e^{-2x+1} - 2e = 0$.

5.2 Résoudre des inéquations avec les exponentielles

Propriété

Pour tous nombres réels a et b : $e^a < e^b \iff a < b$

Méthode : Résoudre une inéquation avec les exponentielles.

On utilise la même méthode vue précédemment que pour les équations.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{1-3x} < e^{2x-3}$

S'évaluer :

QCM n°2

5.3 Changement de variables

Méthode : Utiliser le changement de variables

Il est parfois nécessaire de changer de variable pour procéder en deux étapes successives lors de la résolution.
C'est une technique très classique en mathématiques, qu'il faut absolument connaître si vous poursuivez dans la matière.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} - 3 \leqslant 0$

5.4 Études de signes

Méthode : Étude de signes

Déterminer le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - e^{-x}$

6 Étude complète d'une fonction exponentielle

Méthode : Étude complète de fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-3x+4}$.

1) Déterminer une expression de la dérivée de f.
2) Étudier le signe de $f'(x)$.
3) Étudier les variations de f.