Cours & méthodes

Fonction exponentielle :
Définition et propriétés algébriques.

12 ANALYSE

1 Introduction

Approche physicienne :

Pour répondre à des problèmes physiques, on est amené à chercher s'il existe une ou des fonction(s) qui soient égales à sa(leur) dérivée.
On cherche des fonctions f qui vérifient pour tout tout x réel,

$$f(x) = f'(x) \text{ que l'on note plus simplement : } \quad f = f'$$

.

Podcast

L'ensemble du cours.

Définition : Équation différentielle

L'équation $f = f'$ est une égalité dont l'inconnue est une fonction.
C'est un type d'équations particulières, très différentes des équations classiques où l'inconnue est une variable.
On appelle **équation différentielle** cette famille d'équations dont l'inconnue est une fonction.

Remarque

L'étude approfondie de la résolution des équations différentielles est du programme de Terminale. Ce n'est pas l'objet de ce chapitre.
L'idée ici est uniquement de résoudre une équation différentielle particulière : $f = f'$ pour répondre à un problème des physiciens.

Solution évidente de de l'équation $f = f'$:

La première idée qu'on peut avoir pour trouver une solution à cette équation est la fonction qui vaut, pour tout x réel, $f(x) = 0$. La fonction nulle vérifie évidemment aussi $f'(x) = 0$.
On a donc trouvé une solution à l'équation $f = f'$, c'est la fonction nulle.

Ajout d'une condition initiale :

Pour éviter cette situation sans grand intérêt, qui ne satisfait pas les physiciens, nos amis rajoutent ce qu'ils appellent **une condition initiale** : existe-t-il une fonction f qui vérifie $f = f'$ pour tout x réel, et qui vérifie aussi $f(0) = 1$.
L'intérêt de rajouter $f(0) = 1$ c'est que la fonction nulle solution, solution triviale que nous avions obtenue, ne vérifie pas cette condition initiale.

Recherche de solution(s) de de l'équation $f = f'$ avec condition initiale :

On cherche alors d'autres fonctions qui vérifient ces deux conditions :
On peut chercher dans les fonctions de références (carré, cube, inverse, racine carrée, affine, trigonométriques, ...), on ne trouve aucune fonction qui vérifie ces conditions, à part la fonction nulle.

Fonction solution de de l'équation $f = f'$ avec condition initiale :

On va finalement supposer qu'il existe une unique fonction qui vérifie ces conditions.
L'objet de ce chapitre est d'étudier cette fonction qui vérifie : $f = f'$.
On se "contentera" dans ce chapitre, de prouver son unicité puis d'étudier ses propriétés.

Podcast

2 Définition de la fonction exponentielle :

2.1 Bilan de l'activité

Propriété

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration

La démonstration de l'unicité est rédigée dans l'activité du plan de travail. L'existence est supposée vraie.

Définition

Comme cette fonction précédemment définie est unique, on lui donne un nom : **fonction exponentielle**.
On la note exp.
On a donc, pour tout réel x,

$$\exp'(x) = \exp(x) \text{ et en particulier : } \exp(0) = 1$$

2.2 Première propriété de la fonction exponentielle

Propriété

Pour tout réel $x, \exp(x) \neq 0$.

Démonstration

On a démontré ce résultat dans la démonstration précédente.

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)}$

Démonstration

On a montré dans la première démonstration que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \quad$ et $\quad \exp(x) \neq 0$
Il en résulte que : pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)}$

Exemple

$$\exp(3) = \frac{1}{\exp(-3)} \quad \text{et} \quad \exp(-2) = \frac{1}{\exp(2)}$$

2.3 Relation fonctionnelle :

Démonstration en vidéo

Propriété : Relation fondamentale

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Démonstration

Soit $y \in \mathbb{R}$. On définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x+y)$.

Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times 1 \times \exp(x+y) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x+y) = h(x)$.

On a montré que sur $\mathbb{R}$, on a $h(x) = h'(x)$.

De plus $h(0) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(0+y) = 1$.

On déduit des points précédents que h est exactement la fonction exponentielle,

Pour tout entier x, on a $h(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x+y) = \exp(x)$

Ce qui est équivalent à dire que : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$, pour tous réels x et y.

Ce qui démontre la propriété.

Exemple

$\exp(5+7) = \exp(5) \times \exp(7)$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x+2) = \exp(2) \times \exp(x)$

Remarque : Astuce importante

On dit que la fonction exponentielle transforme une somme en un produit.

$$\exp(\underbrace{3+4}_{\text{somme}}) = \underbrace{\exp(3) \times \exp(4)}_{\text{produit}}$$

Méthode : Appliquer la relation fonctionnelle

Simplifier : $\exp(3) \times \exp(-4) \times \exp(2)$

2.4 Signe de l'exponentielle

Podcast

Propriété

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout nombre réel x, d'après la relation fonctionnelle, on a :

$\exp(x) = \exp\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0.$

En effet, un carré est toujours positif ou nul.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 0$.
Or la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc pour tout nombre réel x, $\exp(x) > 0$.

2.5 Propriétés algébriques de la fonction exp

Propriété

Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Démonstration en vidéo

Exemple

$\exp(5-7) = \dfrac{\exp(5)}{\exp(7)}$, et pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x-2) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(2)}$

Démonstration

Pour tous nombres réels x et y, :
$\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y)$ d'après la relation fonctionnelle.
Or $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$ d'après la propriété de la fonction exponentielle vue en début de cours,
donc $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Propriété : Généralisation :

On peut généraliser la relation fonctionnelle à plus de deux termes :
Pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

$$\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)$$

Propriété

Pour tous nombre réel x et tout nombre entier relatif n,

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n$$

.

Exemple

$\exp(5 \times 3) = \exp(5)^3 = \exp(3)^5$, et pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(2x) = \exp(x)^2$

Démonstration

- Lorsque $n > 0$, on obtient l'égalité en appliquant la propriété précédente dans le cas particulier où $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$.
- Lorsque $n = 0$, l'égalité est vérifiée car $\exp(0) = 1$.
- Lorsque $n < 0, \exp(nx) = \exp((-n)(-x))$.
  Or $-n > 0$ donc d'après le premier cas, $\exp(nx) = (\exp(-x))^{-n}$.

Donc $\exp(nx) = (\exp(-x))^{-n} = \left(\dfrac{1}{\exp(x)}\right)^{-n} = (\exp(x))^n$

Remarque

On peut retenir que l'exponentielle transforme le **produit** en **puissances**.

S'évaluer

QCM n°1

3 Notation e

Définition

On note e l'image de 1 par la fonction exp.
Ainsi, $\exp(1) = \mathrm{e}$
Ce nombre e est appelé **constante de Neper** ou **nombre d'Euler**.

Podcast

Remarque

Le nombre e est irrationnel et vaut approximativement $\mathrm{e} \approx 2,718$.

Propriété

Pour tout nombre réel $x, \exp(x) = \mathrm{e}^x$ (lire e exposant x ou e de x)

Démonstration

Pour tout nombre entier relatif n, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.
Par extension, on peut noter, pour tout nombre réel x, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$
On définit ainsi n'importe quelle puissance RÉELLE du nombre e.

Propriété : Valeurs remarquables :

$$\mathrm{e}^0 = 1 \qquad \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

Propriété : Propriétés admises :

Pour tous nombres réels x et y et tout nombre entier relatif n, on a :

- $\mathrm{e}^x > 0$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$

Exemple

Simplifier les nombres suivants :

- $e^3 \times e^4 = e^{3+4} = e^7$
- $e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$
- $\left(e^{1,5}\right)^4 = e^{1,5\times 4} = e^6$
- $(e^x)^4 = e^{4\times x} = e^{4x}$

Méthode : Calculer avec des exponentielles.

On utilise les propriétés de calcul sur les puissances entières d'un réel vues au collège.

- $A(x) = e^3 \times e^{-4} \times e^2$
- $B(x) = \dfrac{e^{-3}}{e^2}$
- $C(x) = \dfrac{e^2 \times e^4}{e}$
- $D(x) = \left(e^{3x}\right)^2$
- $E(x) = e \times (e^x)^{-4}$
- $F(x) = \dfrac{e^{-1} \times e^{-2}}{(e^2)^{-2} \times e^{-x}}$

S'évaluer

QCM n°2