Cours & méthodes

Trigonométrie

10

ALGEBRE

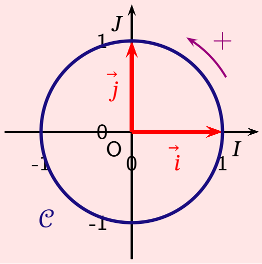
1 Repérage sur un cercle :

Cours en vidéo

1.1 Cercle trigonométrique

Définition : Cercle trigonométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Le **cercle trigonométrique** est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon 1 orienté dans le sens direct.



Podcast

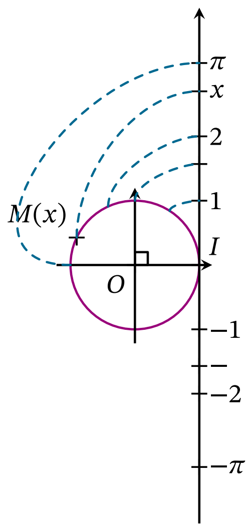
Remarque

Notez bien que le **rayon est d'une unité**
et qu'il y a un **sens de rotation**, sens anti-horaire, appelé sens trigonométrique.

1.2 Enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique

Propriété

Pour **repérer un point M du cercle trigonométrique**, on enroule autour du cercle un axe orienté, gradué, d'origine le point I. On peut alors associer, au point M, un réel x, abscisse d'un point de l'axe qui vient se superposer au point M.



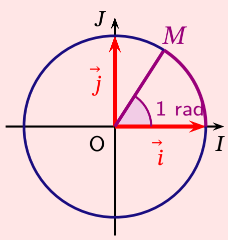
Remarque

- Lorsqu'on enroule l'axe dans le sens **direct**, ce sont des points d' **abscisses positives** qui se superposent à M, dans le sens **indirect**, ce sont des points d'**abscisses négatives**.
- Tout point sur le cercle trigonométrique se repère par **plusieurs nombres réels**, distants d'un multiple de 2π, selon le nombre de tours complets de l'enroulement de l'axe.

1.3 Mesure d'un angle en radian :

Définition : Le radian

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O, de rayon 1.
Un radian est la mesure d'un angle au centre
qui intercepte le cercle $\mathcal{C}$ suivant un arc de longueur 1.



Podcast

Cours en vidéo

Remarque

- Avec cette définition, des mesures d'angles peuvent être négatives.
  On pourra travailler par exemple avec un angle $\widehat{A} = -\pi rad$.
- Plusieurs nombres peuvent exprimer le même angle (s'ils correspondent à un nombre entier de tour supplémentaires).
  Par exemple $2\pi\ rad = 4\pi\ rad = 6\pi\ rad = ...$

Propriété : Point-image sur un cercle

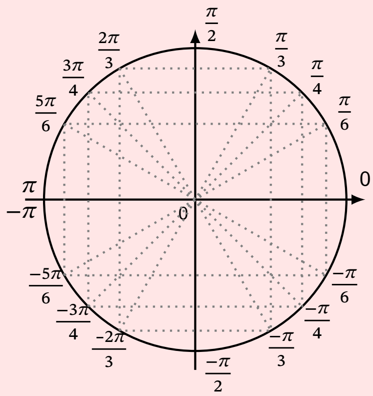
Tout nombre réel x a un point-image unique sur le cercle C.
S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x' = x + k \times 2\pi$, alors x et x' ont le même point-image sur le cercle C.

Propriété : Convertir les degrés en radian et inversement.

Les mesures en radians et en degrés d'un angle géométrique sont proportionnelles :
La longueur d'un cercle de rayon r est donnée par la formule : $\mathcal{L} = 2\pi r$.
Pour le cercle trigonométrique, cette longueur est donc de 2π, car $r = 1$. $2\pi\ \ rad$ correspond donc à 360°

Podcast

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π



Il faut absolument connaître ces correspondances et savoir passer d'une mesure en degré à sa correspondance en radian, et réciproquement.

Méthode : Convertir entre degrés et radians. Niveau *

Calculer les nombres x, y et z dans le tableau suivant de conversion entre degrés et radians.

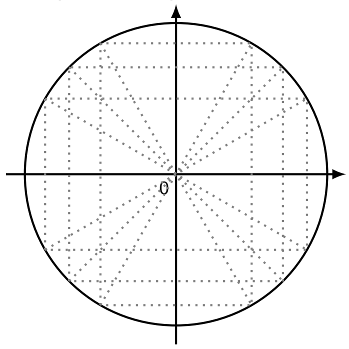
Degrés	35	y	150
Radians	x	$\frac{\pi}{5}$	z

Correction vidéo

Méthode : Placer un point sur un cercle.

Dans le cercle trigonométrique ci-contre, placer les points associés aux réels

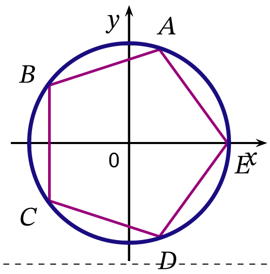
- π ;
- $-\dfrac{\pi}{2}$;
- $\dfrac{2\pi}{3}$;
- $-\dfrac{\pi}{6}$.
- $-\dfrac{\pi}{4}$;



Correction vidéo

Méthode : Exercice basique d'application.

Le pentagone $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.
À quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce pentagone ?



Correction en vidéo

QCM n°1

1.4 Mesure principale d'un angle :

Podcast

Exemple

On donne la mesure d'un angle orienté de $\dfrac{7\pi}{4}$ radians.
En lui ajoutant, ou en lui enlevant, des multiples de 2π rad, on peut exprimer le même angle d'une autre manière :
Des mêmes mesures de $\dfrac{7\pi}{4}$ sont :

- $\dfrac{7\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{\pi}{4}$
- $\dfrac{7\pi}{4} - 4\pi = -\dfrac{9\pi}{4}$
- $\dfrac{7\pi}{4} - 6\pi = -\dfrac{17\pi}{4}$
- $\dfrac{7\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{15\pi}{4}$
- $\dfrac{7\pi}{4} + 4\pi = \dfrac{23\pi}{4}$
- $\dfrac{7\pi}{4} + 6\pi = \dfrac{31\pi}{4}$

Remarque : "à 2π près"

Le même angle en radians peut donc s'exprimer d'une infinité de manière, "à 2π" rad près.
On étant prudent sur le sens du signe =, on peut dire que, "à 2π" rad près :

$$\frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} = -\frac{9\pi}{4} = -\frac{17\pi}{4} = \frac{15\pi}{4} \dots$$

Pour mettre d'accord une communauté, et se comprendre quand on évoque des mesures, il faut nous accorder sur des normes standards.

Il faut éviter des confusions entre les mesures $\dfrac{7\pi}{4}$ et $\dfrac{-\pi}{4}$ qui sont deux expressions du même angle.
Comme pour la notation scientifique avec les puissances de 10, on va définir un mode uniforme d'écriture de notre mesure d'angle.

Définition : Mesure principale

La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Exemple

Parmi tous les angles égaux à 2π près dans la situation précédente, un seul se situe dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$:
C'est $-\dfrac{\pi}{4}$.
On dit alors que $-\dfrac{\pi}{4}$ est la **mesure principale** de cet angle orienté.

Méthode : Déterminer la mesure principale d'un angle.

Pour obtenir la mesure principale :

- soit la mesure de l'angle est dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, c'est alors la mesure principale ;
- soit la mesure de l'angle est strictement supérieure à π. On retranche 2π, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à obtenir une mesure dans $]-\pi\ ;\ \pi]$;
- soit la mesure de l'angle est inférieure ou égale à π. On ajoute 2π, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à obtenir une mesure dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Déterminer la mesure principale de l'angle θ, c'est-à-dire sa mesure sur $]-\pi;\pi]$
$\theta = \dfrac{-8\pi}{3}$

Exercice MathALEA

QCM n°2

2 Cosinus et sinus d'un nombre réel :

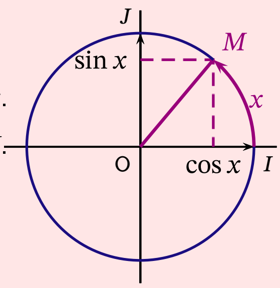
2.1 Définitions

podcast

Définition : Cosinus et sinus d'un réel

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à un réel x.

- Le cosinus du réel x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.
- Le sinus du réel x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.



Cours en vidéo

Propriété

- Pour tout réel x et pour tout entier relatif k,
  $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$
- Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Démonstration

Les deux premières démonstrations sont évidentes, à partir du cercle trigonométrique.
L'égalité des carrés se démontre facilement avec le théorème de Pythagore.

Méthode : Calculer le cosinus d'un angle en connaissant son sinus ou inversement.

Sachant que $\sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ avec $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$,
déterminer la valeur exacte de $\cos x$.

Correction
en vidéo

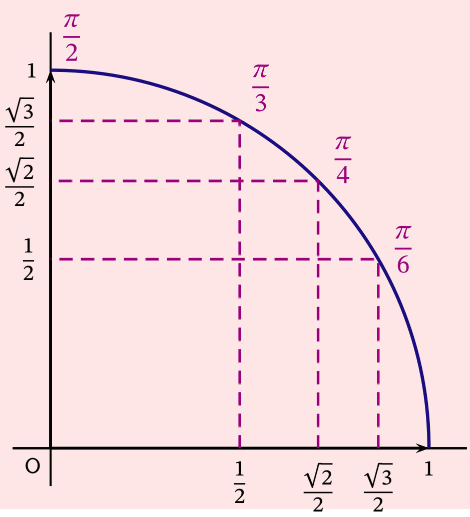
2.2 Valeurs remarquables

Podcast

t

Propriété : Valeurs remarquables

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1



Démonstration : Démonstrations fondamentales

Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Méthode : Calculer un Cosinus ou un Sinus d'un angle.

Calculer $\cos(21\pi)$.

Correction pdf

Remarque : Moyen mnémotechnique

Pour avoir une astuce de mémorisation de ce tableau, à retrouver obligatoirement sans calculatrice, regardez bien la vidéo de cours.

Méthode : Connaître les valeurs du cosinus et sinus d'angles remarquables.

Sans calculatrice et sans cercle trigonométrique issu du cours, donner les valeurs de :

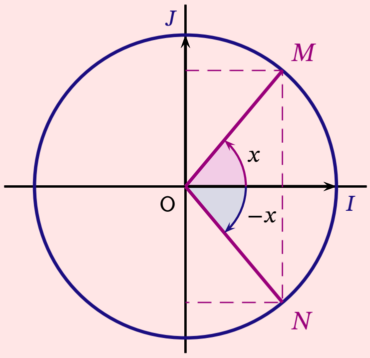
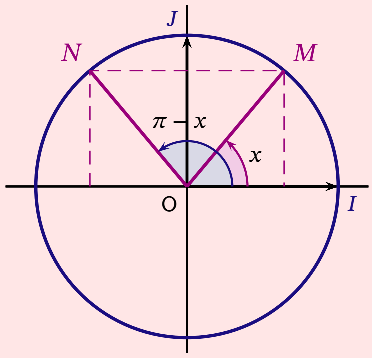
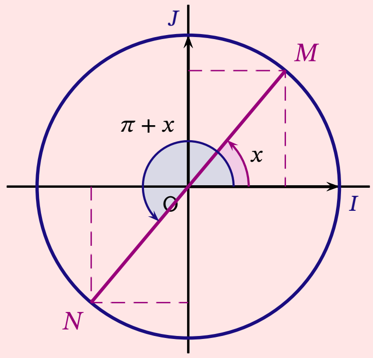
$\sin\pi,\quad \cos\frac{\pi}{2};\quad \cos\frac{\pi}{4};\quad \sin\frac{\pi}{3};\quad \sin\frac{\pi}{4};\quad \cos\frac{\pi}{6}$

Correction en vidéo

2.3 Angles associés

Cours en vidéo

Propriété

Pour tout réel x : $\boxed{\begin{array}{l}\cos(-x)=\cos x\\ \sin(-x)=-\sin x\end{array}}$  M et N sont symétriques par rapport à (OI)	Pour tout réel x : $\boxed{\begin{array}{l}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi-x)=\sin x\end{array}}$  M et N sont symétriques par rapport à (OJ)	Pour tout réel x : $\boxed{\begin{array}{l}\cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=-\sin x\end{array}}$  M et N sont symétriques par rapport à O

Exemple

- $\cos\dfrac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$
- $\sin\dfrac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vidéo de cours

Méthode : Connaître les valeurs du cosinus et sinus d'angles associés.

Sans calculatrice, ni cercle trigonométrique du cours.

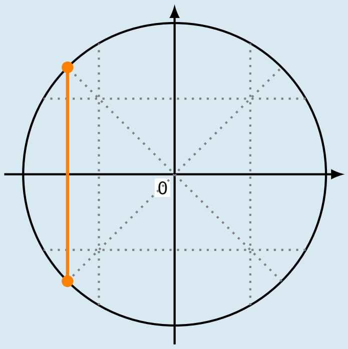
Déterminer la valeur exacte de :

1) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 3) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

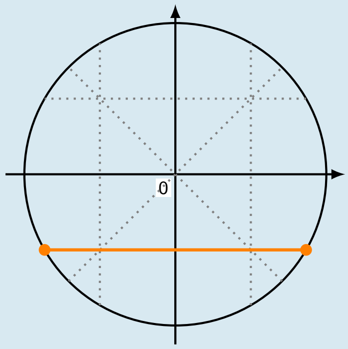
Exercice MathALEA

3 Résoudre des équations trigonométriques (Hors programme)

Bonus : Résoudre les équations de la forme $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$



Équations du type $\cos x = \cos a$



Équations du type $\sin x = \sin a$

Vidéo de cours

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vidéo de cours

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\sin x = \sin \dfrac{7\pi}{10}$

Vidéo de cours