Plan de travail

Limites de suites

5

1 Calculs de termes

Exercice 1

1) Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n - 1$.
Calculer u_{11}.

2) Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 4n - 6$.
Calculer u_5.

MathALÉA

Exercice 2

1) Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - 10$.
Calculer u_5.

2) Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = -4$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -4u_n + 5$.
Calculer u_2.

MathALÉA

Exercice 3

u définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n$.
Calculer u_1, u_2 et u_3.

Sésamath

Exercice 4

u est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} ... + \frac{1}{2^n}$.
Calculer les quatre premiers termes de cette suite.

Sésamath

Exercice 5

Calculer :

1) $\sum_{k=0}^{3} k^2$

2) $\sum_{k=0}^{3} (-1)^k$

3) $\sum_{k=0}^{2} \frac{k}{k+1}$

4) $\sum_{k=0}^{2} (2k+1) \times (-1)^k$

Sésamath

Exercice 6

Compléter.

1) $3 + 4 + 5 + ... + 9 = \sum_{k=...}^{...} ...$

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \sum_{k=...}^{...} ...$

2 Algorithmes

Exercice 7

Quelle est la valeur de la U en fin de programme ?

$U \leftarrow 2$
Pour i allant de 1 à 3
  $U \leftarrow \frac{3}{2} \times U$
Fin de Pour

Exercice 8

Quelle est la valeur de la U en fin de programme ?

$U \leftarrow -3$
Pour i allant de 1 à 5
  $U \leftarrow \frac{4}{3} \times U$
Fin de Pour

Exercice 9

Quelle est la valeur de la U en fin de programme ?

$U \leftarrow 5$
$n \leftarrow 0$
Tant que $U < 100$
  $U \leftarrow 2 \times U$
  $n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que

Exercice 10

Quelles sont les valeurs des variables U et n en fin de programme ?

$U \leftarrow 50000$
$p \leftarrow 0$
Tant que $U \geq 30000$
  $U \leftarrow 0,96 \times U$
  $p \leftarrow p + 1$
Fin Tant que

3 Python

Exercice 11

On considère l'algorithme écrit en langage Python :

```
def u(n):
u=1
for i in range(
    n):
u=2*u+1
return u
```

Un utilisateur saisit u(4) dans la console.
Que vaut le nombre u(4) ?

Exercice 12

On considère l'algorithme écrit en langage Python :

```
def u(n):
u=1/3
for k in range(n):
u=1/u-1
return u
```

Qu'obtient-on lorsqu'on appelle **u(3)** dans la console ?

Exercice 13

On considère l'algorithme écrit en langage Python :

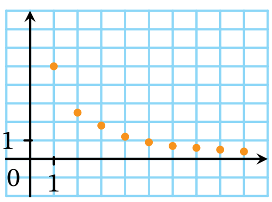
```
def w(n):
w=5
for k in range(1,n+1):
w=w+3*(k-1)
return u
```

Qu'obtient-on lorsqu'on appelle **w(4)** dans la console ?

4 Limites

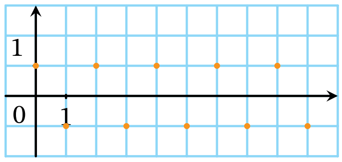
Exercice 14

Lire graphiquement la limite éventuelle de la suite représentée ci-dessous :



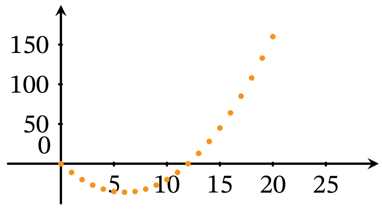
Exercice 15

Lire graphiquement la limite éventuelle de la suite représentée ci-dessous :



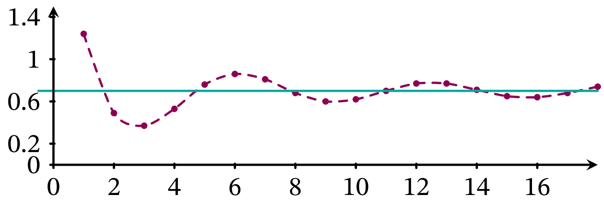
Exercice 16

Lire graphiquement la limite éventuelle



Exercice 17

Lire graphiquement la limite éventuelle de la suite représentée ci-dessous :



5 Déterminer des limites

Exercice 18

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_n = n^2 + 3n - 1$ et $v_n = 2 - \frac{3}{n}$.

Conjecturer à la calculatrice les limites des suites.

Exercice 19

Conjecturer à la calculatrice les limites des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$u_{n+1} = 3u_n - 5$ selon les valeurs de u_0.

1) $u_0 = 3$ puis $u_0 = 1$

2) Déterminer la valeur particulière de u_0, qui donne une suite constante.

Exercice 20

Conjecturer (sans la calculatrice !!) la limite des suites définies pour $n > 1$ par $u_n = \dfrac{3n^2 - 20n}{n^2 + 50n}$

et $v_n = \dfrac{3n - 5}{4n^2 + 7}$

Exercice 21

Conjecturer (sans la calculatrice !!) la limite de la suite (u_n) définie pour $n > 1$ par $u_n = \dfrac{2500000}{n^2}$.

Exercice 22

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

1) $u_n = n^2 + \sqrt{n}$ 2) $u_n = -6n^2 + 1 + \dfrac{1}{n}$

Exercice 23

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

1) $u_n = (2n+1)\left(\dfrac{1}{n} + 2\right)$

2) $u_n = \left(3 + \dfrac{2}{n}\right)\left(\dfrac{5}{n^2} - 2\right)$

3) $u_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$

Exercice 24

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

1) $u_n = \dfrac{e^n}{1 + \dfrac{1}{n}}$ 3) $u_n = \dfrac{1 + \dfrac{3}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}$

2) $u_n = \dfrac{6 + \dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{5}{n} - 1}$ 4) $u_n = \dfrac{5 + \dfrac{2}{n^2}}{n^3 + \dfrac{1}{n}}$

Exercice 25

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2n+1}{n+5}$

Exercice 26

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier $n > 1$ par : $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n}$

Exercice 27

Soit, pour tout entier n, $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1}$.
Montrer que pour tout entier n,
$-\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$,
puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 28

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_n = (-1)^n + n + 2$

Exercice 29

Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$

Exercice 30

Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 3$

Exercice 31

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier $n > 1$ par : $u_n = \dfrac{1 - 2n^3}{n^2 - 3n^3}$

Exercice 32

Déterminer la limite de la suite (w_n) définie pour tout entier n par : $w_n = \dfrac{n^2 - \cos n}{n + 2}$

Exercice 33

Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier n par : $v_n = -3 \times 2^n + (-0,1)^n$

Exercice 34

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier n par :$u_n = \dfrac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1}$

Accès corrections

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 3

$u_1 = 3$, $u_2 = 7$, $u_3 = 15$.

Corrigé de l'exercice 4

$u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{7}{4}$, $u_3 = \frac{15}{8}$ et $u_4 = \frac{31}{16}$.

Corrigé de l'exercice 5

1) $\sum_{k=0}^{3} k^2 = 14$

2) $\sum_{k=0}^{3} (-1)^k = 0$

3) $\sum_{k=0}^{2} \frac{k}{k+1} = \frac{7}{6}$

4) $\sum_{k=0}^{2} (2k+1) \times (-1)^k = 3$

Corrigé de l'exercice 6

1) $\sum_{k=3}^{9} k$

2) $\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{2^k}$

Corrigé de l'exercice 7

Corrigé de l'exercice 8

Corrigé de l'exercice 9

Corrigé de l'exercice 10

Corrigé de l'exercice 11

31

Corrigé de l'exercice 12

-3

Corrigé de l'exercice 13

14

Corrigé de l'exercice 14

$l = 0$

Corrigé de l'exercice 15

Divergente, pas de limite.

Corrigé de l'exercice 16

$l = +\infty$

Corrigé de l'exercice 17

$l = 0,7$

Corrigé de l'exercice 18

Corrigé de l'exercice 19

Corrigé de l'exercice 20

$l = 3$

Corrigé de l'exercice 21

$l = 3$

Corrigé de l'exercice 22

Corrigé de l'exercice 23

Corrigé de l'exercice 24

Corrigé de l'exercice 25

On sait avec les limites de suites de références que :

$$\lim_{n \to +\infty} 2n + 1 = +\infty$$

u_n est donc sous une forme indéterminée $\dfrac{+\infty}{+\infty}$
Pour "lever" l'indétermination, on factorise par le terme de plus haut degré chaque expression :

$$u_n = \frac{2n+1}{n+5} = \frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{n\left(1+\frac{5}{n}\right)} = 2\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{5}{n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right) = 1$
Soit, avec la propriété des produits et quotients des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Corrigé de l'exercice 26

On sait avec les limites de suites de références que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2-3n+2 = +\infty$
et que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-n = u_n$ est donc sous une forme indéterminée $\dfrac{+\infty}{-\infty}$
Pour "lever" l'indétermination, on factorise par le terme de plus haut degré chaque expression :

$$\begin{aligned}\frac{2n^2-3n+2}{1-n} &= \frac{n^2\left(2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-1\right)} \\ &= n\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}-1}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right) = -1$

par propriétés des quotients des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}-1} = -2$

finalement, par propriété des produits de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}-1} = -\infty$

Corrigé de l'exercice 27

Pour tout entier n, on a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$.
Ainsi, en multipliant ces inégalités par $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on obtient

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n+1} = 0$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$,
on en déduit donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Corrigé de l'exercice 28

Pour tout entier naturel n, on sait que :
$-1 \leq (-1)^n \leq 1$ équivaut successivement à $-1+n+2 \leq (-1)^n+n+2 \leq 1+n+2$
donc on obtient $n+1 \leq u_n \leq n+3$
D'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim_{n+1} = +\infty$ D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} n+3 = +\infty$
Attention, ici on n'applique pas le théorème des gendarmes car les limites ne sont pas des valeurs finies.
On va garder l'inégalité de gauche, ce qui donne : $n+1 \leq u_n$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ et $u_n \geq n+1$ alors d'après le théorème de comparaison $n_\infty u_n = +\infty$
Un énoncé plus favorable aurait pu proposer en question intermédiaire de prouver que pour tout entier n, $n+1 \leq u_n$

Corrigé de l'exercice 29

Corrigé de l'exercice 30

Corrigé de l'exercice 31
Corrigé de l'exercice 32
Corrigé de l'exercice 33
Corrigé de l'exercice 34