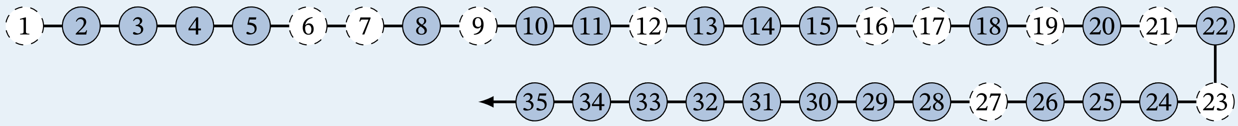
Parcours d'exercices

Suites arithmétiques et Suites géométriques.

9

ALGEBRE

Parcours 2



Exercice 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $r = 3$. Calculer u_3

Exercice 2

On considère que (u_n) est une suite arithmétique, de premier terme u_0 et de raison r :

1) Calculer u_7 sachant que : $u_0 = 5$ et $r = -2$.

2) Calculer u_{17} sachant que : $u_{12} = 31$ et $r = -\frac{1}{2}$.

Exercice 3

Parmi ces suites, lesquelles sont arithmétiques ? :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} + u_n = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n - u_{n+1} = 4 \end{cases}$$

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - 4n$

(u_n) est-elle une suite arithmétique ?

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - 5n^2$

(u_n) est-elle une suite arithmétique ?

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n}{2}$

1) Calculer u_1 : u_2 et u_3 -

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

3) Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terne u_0 er la raison.

Exercice 7

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = -23$.

Calculer u_{45}.

Exercice 8

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 4$.

Déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 9

(u_n) est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 7 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4 - 3n$.

Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terne u_0 er la raison.

Exercice 11

On considère que (u_n) est une suite arithmétique, de premier terme u_0 et de raison r.

Sachant que : $u_2 = 15$ et $u_{12} = 10$, calculer r puis u_{16}.

Exercice 12

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 2$. Calculer $u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

Exercice 13

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_5 = 8$ et de raison $r = -\frac{1}{2}$. Calculer $\sum_{i=5}^{i=10} u_i$.

Exercice 14

A l'aide d'une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison, calculer la somme :

$$S = 2 + 4 + 6 + ... + 100$$

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - 5n$

Déterminer les variations de (u_n).

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 0,3n - 1$
Déterminer les variations de (u_n).

Exercice 17

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $u_0 = 50$. Calculer u_1 et u_3.

Exercice 18

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = -1$ et de premier terme $u_0 = 2$. Calculer u_1 , u_2 et u_3.
Quelle observation peut-on faire ? Quel est le nom d'une telle suite ?

Exercice 19

Pour chacune des suites, indiquer en justifiant si elle est géométrique et préciser si c'est le cas sa raison.

- $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 0,4u_n \end{cases}$
- $\begin{cases} w_0 = 6 \\ w_{n+1} = \dfrac{w_n}{5} \end{cases}$
- $\begin{cases} v_0 = -16 \\ v_{n+1} = 2v_n + 1 \end{cases}$

Exercice 20

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$. (u_n) est-elle une suite géométrique ?

Exercice 21

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7^n$.
(u_n) est-elle une suite géométrique ?

Exercice 22

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times \left(\dfrac{-5}{2}\right)^n$.
(u_n) est-elle une suite géométrique ?

Exercice 23

On considère (u_n), la suite géométrique de raison $q = 200$ et de premier terme $u_0 = 0,5$.
Calculer u_{20}.

Exercice 24

(u_n) est la suite définie par :
$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 4u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 25

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^n$.
Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

Exercice 26

Dans les cas suivants, déterminer les variations de la suite (u_n) et conjecturer sa limite :

1) (u_n) est une suite géométrique de premier terme -2 et de raison $0,6$.
2) (u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 4u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
3) (u_n) est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $1,01$.
4) (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Exercice 27

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = 2$. Calculer $u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

Exercice 28

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 64$ et de raison $q = 0,5$. Calculer $u_1 + ... + u_{12}$.

Exercice 29

Soit (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_5 = 5$ et de raison $q = 0,9$.
Calculer $u_5 + u_6 + ... + u_{20}$.

Exercice 30

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n + 2$.
   a) Calculer v_0.
   b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 3 .
   c) En déduire v_n en fonction de n.
   d) En déduire u_n en fonction de n.

Sesamath

Exercice 31

On s'intéresse à l'évolution du nombre d'abonnés d'un nouveau réseau social dont l'abonnement est payant annuellement. À la fin 2019, le réseau compte exactement 600 personnes abonnées. L'administrateur de la plateforme prévoit chaque année que 20% des anciens abonnés ne se réabonnent pas, et que 2000 nouvelles personnes s'abonnent. On note u_n le nombre d'abonnés sur la plateforme en $2019 + n$.

1) Combien y aura-t-il d'abonnés en 2020 ?
2) Donner la valeur de u_0 et u_1.
3) Justifier que, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 0,8u_n + 2000$.

Sesamath

4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 10000$.
   a) Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b) Déterminer la valeur de v_0.
   c) En déduire v_n en fonction de n.
   d) En déduire u_n en fonction de n.
   e) Combien d'abonnés l'administrateur prévoit-il en 2050 ?

Exercice 32

Lors du lancement d'un hebdomadaire, 1200 exemplaires ont été vendus.
Une étude de marché prévoit une progression des ventes de 2 % chaque semaine.
On modélise le nombre d'hebdomadaires vendus par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de journaux vendus durant la n-ième semaine après le début de l'opération.
On a donc $u_0 = 1200$.

1) Calculer le nombre u_2. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2) Écrire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
3) Voici un programme rédigé en langage Python :

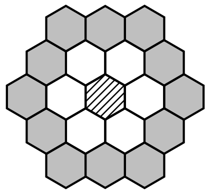
```
def suite ( ) :
  u = 1200
  S = 1200
  n=0
  while S < 30000
    n = n+1
    u = u*1,02
    S=S+u
  return(n)
```

   Le programme retourne la valeur 20.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4) Déterminer le nombre total d'hebdomadaires vendus au bout d'un an.

Exercice 33

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce. Le carrelage choisi a une forme hexagonale.
L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :

- à l'étape 1, il entoure le carreau central, à l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
- à l'étape 2 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.



On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la n-ième étape ($n \geqslant 1$).
Ainsi $u_1 = 6$ et $u_2 = 12$.

1) Quelle est la valeur de u_3 ?
2) On admet que la suite (u_n) est arithmétique de raison 6. Exprimer u_n en fonction de n.
3) Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5 ?
   Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?
4) On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
   Montrer que $S_n = 6(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ puis que $S_n = 3n^2 + 3n$.
5) Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la n-ième étape, est donc

$$3n^2 + 3n + 1$$

   À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son $2977^{\text{ème}}$ carreau.
   Combien a-t-il fait d'étapes ?

Exercice 34

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

1) Calculer $u_0,\ u_1, u_2$ puis u_{99}.
2) a) Exprimer, pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ en fonction de n.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}.$$

   c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3) Soit a un nombre réel dans l'intervalle $]1\ ; 2]$.
   Recopier et compléter sur la copie le programme Python suivant pour qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant a$, où a est un nombre de l'intervalle $]1 ; 2]$.

```
Def seuil(a) :
n = 0
while (n+2) / (n+1) ... a :
n = ...
return ...
```

Exercice 35

Un service de vidéos à la demande réfléchit au lancement d'une nouvelle série mise en ligne chaque semaine et qui aurait comme sujet le quotidien de jeunes gens favorisés.
Le nombre de visionnages estimé la première semaine est de 120000. Ce nombre augmenterait ensuite de 2 % chaque semaine.
Les dirigeants souhaiteraient obtenir au moins 400000 visionnages par semaine.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de visionnages n semaines après le début de la diffusion. On a donc $u_0 = 120000$.

1) Calculer le nombre u_1 de visionnages une semaine après le début de la diffusion.
2) Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 120000 \times 1,02^n$.
3) À partir de combien de semaines le nombre de visionnages hebdomadaire sera-t-il supérieur à 150000 ?
4) Voici un algorithme écrit en langage Python :

```
def seuil():
  u = 120000
  n = 0
  while u < 400000:
    n = n+1
    u = 1.02*u
  return n
```

   Déterminer la valeur affichée par cet algorithme et interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

5) On pose pour tout entier naturel n : $S_n = u_0 + \ldots + u_n$. Montrer que l'on a :

$$S_n = 6000000 \times \left(1,02^{n+1} - 1\right).$$

   En déduire le nombre total de visionnages au bout de 52 semaines (arrondir à l'unité).

Accès aux corrigés

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

(u_n) une suite arithmétique donc on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Comme $r = 3$, on a :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$.

en particulier, $u_1 = u_0 + 3 = -1 + 3 = 2$.

puis $u_2 = u_1 + 3 = 2 + 3 = 5$.

puis $u_3 = u_2 + 3 = 5 + 3 = 8$.

Corrigé de l'exercice 2

On sait que le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 + nr$
a. On donne $u_0 = 5$ et $r = -2$.

$$\rightarrow u_7 = u_0 + 7r = 5 + 7 \times (-2) = 5 - 14 = -9$$

b. On donne $u_{12} = 31$ et $r = -\frac{1}{2}$

$$u_{17} = u_{12} + (17 - 12)r = 31 + 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{62}{2} - \frac{5}{2} = \frac{57}{2}$$

Corrigé de l'exercice 3

On sait que une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que
pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

2 méthodes :

- On calcule donc $u_{n+1} - u_n$ pour savoir si cela est égal à une constante
- On cherche un contre exemple avec les premiers termes.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} + u_n = 1 \end{cases}$$

On déduit que $u_{n+1} = 1 - u_n$
Contre exemple :
$u_1 = 1 - u_0 = 0$
$u_2 = 1 - u_1 = 1$
Et on constate sur un contre exemple, que $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$
La suite n'est donc pas arithmétique.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n - u_{n+1} = 4 \end{cases}$$

On déduit que $u_{n+1} = u_n - 4$
ou encore que $u_{n+1} - u_n = -4$
La suite est donc une suite arithmétique de raison -4.

Corrigé de l'exercice 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - 4n$

$$u_1 = 1 - 4 \times 1 = -3; u_2 = 1 - 4 \times 2 = -7 \text{ et}$$
$$u_3 = u_2 = 1 - 4 \times 3 = -11.$$

$$u_2 - u_1 = -7 - (-3) = -4$$
$$u_3 - u_2 = -11 - (-7) = -4$$

On conjecture que la suite est arithmétique.
Mais ce n'est pas parce que cela est vrai pour les premiers termes que c'est vrai pour tous les termes de cette suite
Soit n un entier quelconque.

$u_{n+1} = 1 - 4(n + 1) = 1 - 4n - 4 = -4n - 3$
$u_{n+1} - u_n = (-4n - 3) - (1 - 4n) = -4n - 3 - 1 + 4n = -4$

Pour tout entier n, l'écart entre deux termes consécutifs de la suite est constant donc (u_n) est une suite arithmétique.

Corrigé de l'exercice 5

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - 5n^2$

$$u_1 = 1 - 5 \times 1^2 = -4; u_2 = 1 - 5 \times 2^2 = -19 \text{ et}$$
$$u_3 = 1 - 5 \times 3^2 = -44.$$
$$u_2 - u_1 = -19 - (-4) = -15;$$
$$u_3 - u_2 = -44 - (-19) = -25$$

L'écart entre les premiers termes de la suite n'est pas constant donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
AUTRE METHODE :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 - 5(n+1)^2 = 1 - 5\left(n^2 + 2n + 1\right) \\ &= -5n^2 - 10n - 4 \\ u_{n+1} - u_n &= -5n^2 - 10n - 4 - \left(1 - 5n^2\right) = -10n - 5 \end{aligned}$$

L'écart entre deux termes consécutifs de la suite n'est pas constant (il dépend de la valeur de n) donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

Corrigé de l'exercice 6

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n}{2}$
a. $u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{2} = 1$ et $u_3 = \frac{3}{2}$.
b. $u_{n+1} = \frac{n+1}{2}$
c. $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$ donc (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = \frac{0}{2} = 0$ et de raison $r = \frac{1}{2}$

Corrigé de l'exercice 7

Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et

de premier terme u_0 est $u_n = u_0 + nr$.
On applique, et cela donne :
$u_{45} = u_0 + 45 \times 2 = -23 + 90 = 67$

Corrigé de l'exercice 8

Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 + nr$.
On applique, et cela donne :
$u_n = u_0 + n \times r = 4 + 3n = 3n + 4$

Corrigé de l'exercice 9

On reconnaît une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison -7.
Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 + nr$.
On applique, et cela donne :
$u_n = u_0 + n \times r = 4 - 7n = -7n + 4$

Corrigé de l'exercice 10

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4 - 3n$.
Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terne u_0 er la raison.
On reconnaît le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est

$$u_n = u_0 + nr$$

avec $u_0 = 4$ et $r = -3$.
La suite (u_n) est donc bien arithmétique.
Une autre méthode consiste à calculer

$$u_{n+1} - u_n = \ldots = -3$$

On obtient une constante, qui est la raison de la suite arithmétique. CQFD.

Corrigé de l'exercice 11

On sait que :
Si (u_n) une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

On donne $u_2 = 15$ et $u_{12} = 10$. Calculer de la raison r :

$$\begin{aligned} & u_{12} = u_2 + (12 - 2)r \\ \iff & 15 = 10 + 10r \\ \iff & 5 = 10r \\ \iff & \frac{5}{10} = r \\ \iff & r = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où :

$$u_{16} = u_{12} + (16 - 12)r = 10 + 4 \times \frac{1}{2} = 12$$

Corrigé de l'exercice 12

On sait que :(u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme

$u_0 = 5$ et de raison $r = 2$.
$u_{10} = u_0 + 10r = 5 + 10 \times 2 = 25$
$u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = (u_0 + u_{10}) \times \dfrac{11}{2} = (5 + 25) \times \dfrac{11}{2} = 165$

Corrigé de l'exercice 13

On sait que :(u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p,

$$\sum_{i=p}^{i=n} u_i = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_5 = 8$ et de raison $r = -\dfrac{1}{2}$

$u_{10} = u_5 + (10 - 5)r = 8 + 5 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{2}$
$\displaystyle\sum_{i=5}^{i=10} u_i = (u_5 + u_{10}) \times \frac{10 - 5 + 1}{2} = \left(8 + \frac{11}{2}\right) \times \frac{6}{2} = \frac{27}{2} \times 3 = \frac{81}{2}$

Corrigé de l'exercice 14

A l'aide d'une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison, calculer la somme :

$$S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$$

(c'est-à-dire la somme des 50 premiers nombres pairs).
On sait que :(u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0,

$$\sum_{i=0}^{i=n} u_i = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 2$.
ATTENTION : le 50ème terme de (u_n) est u_{49} :

$$u_{49} = u_0 + 49r = 2 + 49 \times 2 = 2 + 98 = 100$$
$$\sum_{i=0}^{i=49} u_i = (u_0 + u_{49}) \times \frac{49 + 1}{2} = (2 + 100) \times \frac{50}{2} = 2550$$

Corrigé de l'exercice 15

On sait que :
Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est

$$u_n = u_0 + nr$$

donc (u_n) est une suite arithmétique avec $u_0 = 1$ et $r = -5$
D'autre part, on sait que :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$

- (u_n) est constante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0 \iff r = 0$.
- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0 \iff r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0 \iff r < 0$.

ici, $r < 0$ donc la suite est décroissante.

Corrigé de l'exercice 16

On sait que :
Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est

$$u_n = u_0 + nr$$

donc (u_n) est une suite arithmétique avec $u_0 = -1$ et $r = 0,3$
$r > 0$ donc la suite est croissante.

Corrigé de l'exercice 17

Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

On applique donc : pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{5} \times u_n$$

donc,

$u_1 = \frac{1}{5} \times u_0 = \frac{1}{5} \times 50 = 10$

$u_2 = \frac{1}{5} \times u_1 = \frac{1}{5} \times 10 = 2$

$u_3 = \frac{1}{5} \times u_2 = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$

Corrigé de l'exercice 18

Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

On applique donc : pour tout entier n,

$$u_{n+1} = -1 \times u_n$$

donc,

$u_1 = -u_0 = -2$

$u_2 = -u_1 = 2$

$u_3 = -u_2 = -2$

La suite est une alternance de 2 et de -2.
On appelle cela une suite alternée.

Corrigé de l'exercice 19

Pour chacune des suites, indiquer en justifiant si elle est géométrique et préciser si c'est le cas sa raison.

- $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 0,4u_n \end{cases}$
- $\begin{cases} v_0 = -16 \\ v_{n+1} = 2v_n + 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} w_0 = 6 \\ w_{n+1} = \dfrac{w_n}{5} \end{cases}$

Il y a deux méthodes :

- Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

- Le contre exemple en montrant que le quotient de deux termes consécutif n'est pas constant.

- $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 0,4u_n \end{cases}$
  On montre facilement que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0,4$ pour tout n entier.
  La suite est donc géométrique de raison $q = 0,4$.
- $\begin{cases} v_0 = -16 \\ v_{n+1} = 2v_n + 1 \end{cases}$
  On calcule $v_1 = -31$ et $v_2 = -60$ et on constate que $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{-31}{-16} \neq \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{-60}{-31}$
  La suite n'est pas géométrique.
- $\begin{cases} w_0 = 6 \\ w_{n+1} = \dfrac{w_n}{5} = \dfrac{1}{5} \times w_n \end{cases}$
  On montre facilement que $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{1}{5}$ pour tout n entier.
  La suite est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$.

Corrigé de l'exercice 20

Il y a deux méthodes :

- Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

- Le contre exemple en montrant que le quotient de deux termes consécutif n'est pas constant.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2$
Le rapport entre deux termes consécutifs n'est pas constant (il dépend de n), donc (u_n) n'est pas une suite géométrique.
On aurait pu aussi utiliser le contre exemple.

Corrigé de l'exercice 21

Il y a deux méthodes :

- Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

- Le contre exemple en montrant que le quotient de deux termes consécutif n'est pas constant.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7^n$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7^{n+1}}{7^n} = 7$ donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 7^0 = 1$ et de raison $q = 7$.

Corrigé de l'exercice 22

Il y a deux méthodes :

- Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

- Le contre exemple en montrant que le quotient de deux termes consécutif n'est pas constant.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^n$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^{n+1}}{3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^n} = \frac{-5}{2}$
donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^0 = 3$ et de raison $q = \frac{-5}{2}$.

Corrigé de l'exercice 23

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 200$ et de premier terme $u_0 = 0,5$.
On sait d'après le cours, que sa forme explicite est : $u_n = u_0 \times q^n = 0,5 \times 200^n$
$u_{20} = 0,5 \times 200^{20} \approx 5 \times 10^{45}$
Ce qui est incommensurable.

Corrigé de l'exercice 24

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0,
on sait d'après le cours, que sa forme explicite est : $u_n = u_0 \times q^n$

1) $u_n = -2 \times 0.6^n$
2) On reconnaît dans la forme par récurrence, $u_0 = -3$ et $q = 4$.
   d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -3 \times 4^n$

Corrigé de l'exercice 25

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^n$.
$u_1 = 3 \times 2^1 = 6$; $u_2 = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$ et $u_3 = 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$.
Les premiers termes laissent bien penser à une suite géométrique.
Pour le vérifier, on calcule : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
$u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2 \times 2^n = 6 \times 2^n$
donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n} = 2$
donc (u_n) est bien une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3 \times 2^0 = 3$ et de raison $q = 2$.

Corrigé de l'exercice 26

On applique le cours, en vérifiant les valeurs de q et u_0 :

1) $u_0 = -2 < 0$ et de raison $q = 0,6$ donc $0 < q < 1$.
   D'après le cours la suite (u_n) est croissante et sa limite est 0 .
   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n 0$
2) $u_0 = -3 < 0$ et de raison $q = 4$ donc $q > 1$.
   D'après le cours la suite (u_n) est décroissante et sa limite est $-\infty$.
   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
3) $u_0 = 2 > 0$ et de raison $q = 1,01$ donc $q > 1$.
   D'après le cours la suite (u_n) est croissante et sa limite est $+\infty$.
   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
4) On reconnaît la forme explicite d'une suite géométrique.
   $u_0 = 2 > 0$ et de raison $q = \frac{1}{3}$ donc $q < 1$.
   D'après le cours la suite (u_n) est décroissante et sa limite est 0 .
   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Corrigé de l'exercice 27

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = 2$.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} &= u_0 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \\ &= -3 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} \\ &= -3 \times \frac{1 - 2048}{-1} \\ &= 3 \times (-2047) \\ &= -6141 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 28

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 64$ et de raison $q = 0,5$.

$$\begin{aligned} u_1 + \ldots + u_{12} &= u_1 \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} \\ &= 64 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 64 \times \frac{1-\frac{1}{4096}}{\frac{1}{2}} \\ &= 128 \times \left(\frac{4096}{4096} - \frac{1}{4096}\right) \\ &= 128 \times \frac{4095}{4096} \\ &= \frac{4095}{32} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 29

Soit (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_5 = 5$ et de raison $q = 0,9$.

$$\begin{aligned} u_5 + u_6 + \ldots + u_{20} &= u_5 \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} \\ &= 5 \times \frac{1-0,9^{20-5+1}}{1-0,9} \\ &= 5 \times \frac{1-0,9^{16}}{0,1} \\ &= \frac{5}{0,1} \times \left(1-0,9^{16}\right) \simeq 40,74 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 30

. 1. $u_1 = 3u_0 + 4 = 3 \times 2 + 4 = 10$

$$u_2 = 3u_1 + 4 = 3 \times 10 + 4 = 34$$

2. a) $v_0 = u_0 + 2 = 2 + 2 = 4$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} + 2$

$$\begin{aligned} &= 3u_n + 4 + 2 \\ &= 3u_n + 6 \\ &= 3\left(u_n + 2\right) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 3^n$.

d) $v_n = u_n + 2$. Donc $u_n = v_n - 2$.

Donc $u_n = 4 \times 3^n - 2$.

Corrigé de l'exercice 31

Corrigé de l'exercice 32

On a donc $u_0 = 1200$.

1) Augmenter de 2% revient à multiplier par $\left(1\frac{2}{100}\right) = 1 + 0,02 = 1,02$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $U_0 = 1200$ et de raison 1,02. Donc $u_1 = u_0 \times 1,02 = 1,024$ et $u_2 v = u_1 \times 1,02 \approx 1044,4$, soit 1044 à l'unité près.
2) On sait que $u_n = u_0 \times 1,02^n = 1200 \times 1,02^n$.
3) Voici un programme rédigé en langage Python :
   def suite ( ) :
   u = 1200
   S = 1200
   n = 0
   while S < 30000
   n = n + 1
   u = u ∗ 1, 02
   S = S + u
   return (n)
   Le programme retourne la valeur 20 .
   20 signifie que la somme $u_0 + u_1 + + \ldots + u_{20}$ dépasse 30000 à la 20ème semaine.
4) Déterminer le nombre total d'hebdomadaires vendus au bout d'un an.
   Le nombre total d'hebdomadaires vendus au bout d'un an (52 semaines est égal à :
   $u_0 + u_1 + \cdots + u_{51} = 1200 \times \frac{1-1,02^{51}}{1-1,02} = 1200\frac{1,02^{51}-1}{0,02} = 50 \times 1200\left(1,02^{5200}-1\right) \approx 108020$ (exemplaires).

Corrigé de l'exercice 33

1) Quelle est la valeur de u_3 ?
   On a $u_3 = 18$.
2) On admet que la suite (u_n) est arithmétique de raison 6 . Exprimer u_n en fonction de n.
   On a $u_n = 6n$.
3) Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5 ?
   Avec $u_4 = 6 \times 4 = 24$ et $u_5 = 6 \times 5 = 30$, on a donc ajouté $30 - 24 = 6$ carreaux pour faire l'étape 5.
   Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?
   Il a posé en tout :
   $1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 = 91$ carreaux.
4) On pose $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
   Montrer que $S_n = 6(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ puis que $S_n = 3n^2 + 3n$. $S_n = 6\times1+6\times2+6\times3+6\times4+6\times5+\ldots 6\times n = 6 \times (1+2+3+4+5+\ldots n)$.
   Or $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ que l'on peut écrire
   $T_n = n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$ et en sommant membre à membre :
   $2T_n = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$.
   Donc $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et par suite $S_n = 6 \times \frac{n(n+1)}{2} = 3n(n+1) = 3n^2 + 3n$.
5) Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la n-ième étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$.
   À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2977^e^ carreau. Combien a-t-il fait d'étapes ?

On a donc $3n^2 + 3n + 1 = 2977$.

Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $3n^2+3n-2976 = 0$ ou en simplifiant par 3 : $n^2 + n - 992 = 0$.

On a $\Delta = 1 + 4 \times 992 = 1 + 3968 = 3969 = 63^2$.

Les solutions sont donc $n_1 = \dfrac{-1+63}{2} = 31$ et $n_2 = \dfrac{-1-63}{2} = -32$.

On ne retient que la solution 31. L'artisan a donc fait 31 étapes.

Corrigé de l'exercice 34

1) Calculer u_0, u_1, u_2 puis u_{99}.

- $u_0 = \dfrac{2}{1} = 2$
- $u_1 = \dfrac{3}{2} = 1,5$
- $u_0 = \dfrac{4}{3}$;
- $u_{99} = \dfrac{101}{100} = 1,01$

2) a. Exprimer, pour tout entier naturel $n, u_n - 1$ en fonction de n. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{n+2}{n+1} - 1 \\ &= \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} \\ &= \frac{n+2-n-1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{(n+3)(n+1)-(n+2)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+n+3n+3-n^2-4-4n}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Comme $n+1 \geqslant 1 > 0$ et de même $n+2 \geqslant 2 > 0$, le signe de la différence est celui de -1 .

Conclusion : $u_{n+1} - u_n < 0$ montre que la suite (u_n) est décroissante à partir de 2 .

3) Soit a un nombre réel dans l'intervalle$]1; 2]$.

Recopier et compléter sur la copie le programme Python suivant pour qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant a$, où a est un nombre de l'intervalle $]1; 2]$.

Def seuil(a) :

n = 0

while $(n+2)/(n+1) > a$:

$n = n + 1$

return n

Corrigé de l'exercice 35

Un service de vidéos à la demande réfléchit au lancement d'une nouvelle série mise en ligne chaque semaine et qui aurait comme sujet le quotidien de jeunes gens favorisés.

Le nombre de visionnages estimé la première semaine est de 120000 . Ce nombre augmenterait ensuite de 2% chaque semaine.

Les dirigeants souhaiteraient obtenir au moins 400000 visionnages par semaine.

On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de visionnages n semaines après le début de la diffusion. On a donc $u_0 = 120000$.

1) Calculer le nombre u_1 de visionnages une semaine après le début de la diffusion.

Augmenter de 2%, revient à multiplier par $1 + \dfrac{2}{100} = 1 + 0,02 = 1,02$.

Donc $u_1 = u_0 \times 1,02 = 120000 \times ,02 = 122400$.

2) Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 120000 \times 1,02^n$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme 120000 et de raison 1,02.

On sait qu'alors pour tout naturel $n, u_n = 120000 \times 1,02^n$.

3) À partir de combien de semaines le nombre de visionnages hebdomadaire sera-t-il supérieur à 150000 ?

Il faut résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation :

$120000 \times 1,02^n > 150000$. Donc $1,02^n > \dfrac{15}{12} = \dfrac{5}{4} = 1,25$.

La calculatrice donne $u_{11} \approx 1,24$ et $u_{12} =\approx 1,26824$.

Il y aura plus de 150000 visionnages le 12e jour.

4) Voici un algorithme écrit en langage Python : def seuil( ) :

u = 120000

n = 0

while u < 400000 :

n = n + 1

u = 1.02 * u

return n

Déterminer la valeur affichée par cet algorithme et interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme affichera 60.

Cela signifie que la 60e semaine il y aura plus de 400000 visionnages

5) On pose pour tout entier naturel n : $S_n = u_0 + ... + u_n$.

Montrer que l'on a :

$$S_n = 6000000 \times \left(1,02^{n+1} - 1\right)$$

En déduire le nombre total de visionnages au bout de 52 semaines (arrondir à l'unité).

En particulier

$$\begin{aligned} S_{52} &= 50 \times 120000\left(1,02^{53} - 1\right) \\ &= 6000000\left(1,02^{53} - 1\right) \\ &\approx 11138008,4 \end{aligned}$$

Soit environ 11138008 visionnages à l'unité près.

$$\begin{aligned} & S_n = u_0 + \ldots + u_n = 120000 + 120000 \times 1,02^1 + \ldots + 120000 \times 1,02^n && \\ \Longleftrightarrow\ & 1,02S_n = 120000 \times 1,02^1 + \ldots + 120000 \times 1,02^{n+1} && \text{On multiplie par } 1,02 \\ \Longleftrightarrow\ & 0,02S_n = 120000 \times 1,02^{n+1} - 120000 && \text{On soustrait les deux lignes} \\ \Longleftrightarrow\ & S_n = 50 \times 120000\left(1,02^{n+1} - 1\right) = 6000000\left(1,02^{n+1} - 1\right) && \text{On multiplie par 50 (inverse de 0,02)} \end{aligned}$$