

Limites de suites

5

FONCTIONS
& ANALYSE

1 Rappels sur les suites :

1.1 Différentes formes de suites

Définition : Suite définie de manière explicite :

Une suite (u_n) est définie de manière explicite si son terme général s'écrit en fonction de n .



Vidéo de cours

Méthode : Calculer un terme d'une suite définie sous forme explicite : Niveau *

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = -2n^2 - 4n - 6$$

Calculer u_4 .

.....

Correction
MathALEA

Définition : Suite définie par une relation de récurrence :

Une suite (u_n) est définie par récurrence si on connaît son premier terme et si son terme général s'écrit en fonction de termes précédents.

Méthode : Calculer un terme d'une suite définie par récurrence : Niveau *

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = 3 - u_n^2$$

Calculer u_3 .

.....

.....

Correction
MathALEA

S'évaluer



QCM n°1

1.2 Calculatrice

Méthode : Utilisation de la calculatrice : Niveau *

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 5}{2} \end{cases}$$

Afficher à l'écran de la calculatrice les 10 premiers termes de cette suite.

**1.3 Suites, algorithmes , Python :**

Playlist d'initiation à Python avec la calculatrice Numworks

Méthode : Lire un algorithme écrit en langage naturel : Niveau *

On considère l'algorithme suivant :

```

U ← 20
N ← 0
Tant que U < 70
    U ← 0,75 × U + 20
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
  
```

- 1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme. On ajoutera autant de colonnes que nécessaire à la place de celle laissée en pointillés. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de U	20						
Valeur de N	0						
$U < 70$	vrai						

- 2) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

Méthode : Saisir un algorithme Python sur la calculatrice : Niveau *

Saisir cet algorithme écrit en langage Python sur votre calculatrice.

Analyser la saisie de $u(1)$, $u(2)$, puis $u(3)$ dans la console.

Interpréter ce résultat avec les éléments de cours.

```

def u(n):
    u=4
    for i in range(1,n+1):
        u=u**2-2*u
    return u
  
```



Méthode : Lire un algorithme Python : Niveau *

On considère cet algorithme écrit en langage Python :

Un utilisateur saisit $u(4)$ dans la console.

Que retourne l'ordinateur ?

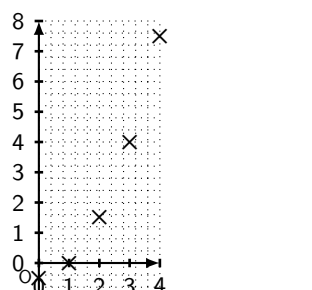
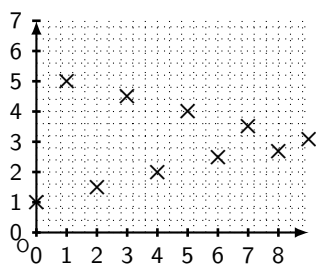
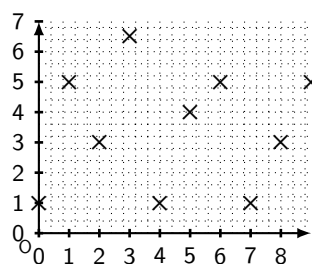
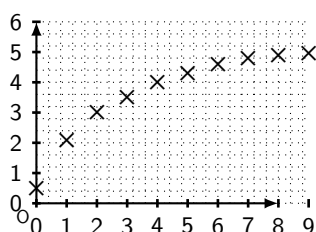
```
def u(n):
    u=2
    for i in range(n):
        u=3*u+2
    return u
```

S'évaluer

QCM n°2

2 Approches de la notion de limite d'une suite :**Méthode : Conjecturer graphiquement des limites de suites : Niveau ***

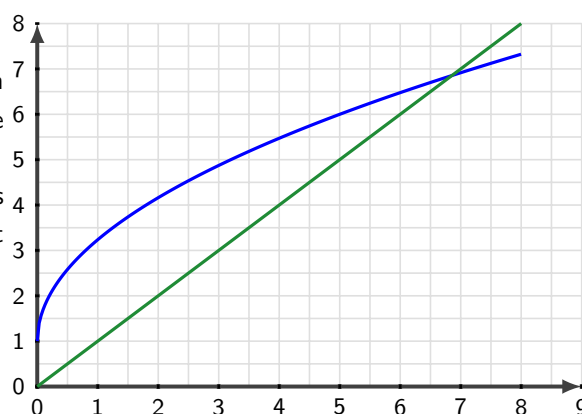
A partir des représentations graphiques, conjecturer si la suite représentée peut ou non avoir une limite finie. Si oui, en donner la valeur.

**Méthode : Représentation graphique d'une suite définie par une fonction : Niveau ****

On a représenté sur le graphique ci-dessous, la fonction f définie sur $[0;9]$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et la droite d'équation $y = x$.

En déduire la représentation graphique des premiers termes de la suite u définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$



Chercher la "limite" d'une suite, c'est analyser le comportement des termes de cette suite quand n prend des valeurs de plus en plus grandes. Pour modéliser ce concept, on dit que n tend vers $+\infty$.



Vidéo de cours

Méthode : Conjecturer une limite infinie. Niveau *

Conjecturer la limite de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 2n + 1$.

Est-il possible de trouver un rang n , tel que $u_n > 1000000$?

.....

.....

.....

.....

.....



Correction

3 Déterminer des limites

3.1 Limite infinie :

Définition

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : Hors programme

La même définition en langage mathématique donnerait :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N, u_n > A$$

Définition : Limite égale à moins l'infini :

Pour une limite égale à $-\infty$, on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

3.2 Limite finie :

Définition

On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si u_n est aussi proche de L que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.



Vidéo de cours

Remarque : Pour les matheux !!

Une définition mathématique de la convergence d'une suite (u_n) vers un réel L est :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - L| < \epsilon$$

Méthode : Conjecturer une limite finie. Niveau *

Conjecturer la limite de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.
Est-il possible de trouver un entier naturel n , tel que $0,999 < u_n < 1$?



Correction

3.3 Suites convergentes et suites divergentes :

Définition : Suite convergente

On dit qu'une suite qui admet une limite finie $L \in \mathbb{R}$ converge vers L .

On dit aussi qu'une telle suite est **convergente**



Vidéo de cours

Exemple

On peut dire que la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ converge vers 1.
On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. (u_n) est donc une suite convergente.

Définition : Suite divergente

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemple

On a vu précédemment que la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 2n + 1$ a pour limite $+\infty$.
 (u_n) est donc une suite **divergente**. Sa limite n'est pas finie. On peut dire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Remarque : Attention !

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.
Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. C'est une suite alternée, qui n'admet donc pas de limite. Elle est donc divergente.

S'évaluer



QCM n°3

3.4 Limites de suites de références (propriétés admises) :

Propriété : Limites de suites de références (propriétés admises) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

S'évaluer



QCM n°4

4 Opérations sur les limites

4.1 Limite d'une somme (propriétés admises) :

Exemple : Cas simple :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1000$.

Rédaction :

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1000 = +\infty$

Quelque soit la constante, il existe toujours un n assez grand pour que n^2 l'emporte et fasse tendre la suite vers $+\infty$.



Vidéo de cours

Exemple : Forme indéterminée :

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$ et $v_n = n - n^2$

Étudions et comparons leur limite respective.

Rédaction :

On sait que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc, **toutes les deux, des différences de suites qui tendent vers l'infini.**

On conjecture les limites de ces suites :

- $u_{100} = 100^2 - 100 = 9900$.

On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On analyse cette conjecture en observant que pour des n très grand, $n^2 \gg n$.

On comprend que n^2 l'emporte sur n pour des grandes valeurs.

- Inversement, $v_{100} = 100 - 100^2 = -9900$.

On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Les deux suites n'ont pas la même limite.

Définition : Forme Indéterminée

On appelle **forme indéterminée**, un schéma qui ne permet pas de donner un résultat général pour calculer une limite.

Par exemple " $+\infty - \infty$ " est une forme indéterminée.

Propriété : Tableau récapitulatif des sommes de limites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

S'évaluer



QCM n°5

Propriété : Bilan sur les sommes de limites.

- On retient qu'on peut opérer avec les limites, quand les suites convergent.
- Une limite infinie l'emporte toujours sur une limite finie.
- Deux limites infinies de même signes ne changent pas la limite infinie.
- Attention, deux limites infinies de signes opposés donnent une **Forme Indéterminée**, F.I. en abrégé.

Méthode : Lever une indétermination : $+\infty - \infty$ Niveau *

Une stratégie efficace pour lever une indétermination consiste à factoriser par le terme de plus haut degré.

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 4n$.



Correction pdf



Correction vidéo

4.2 Limite d'un produit (propriétés admises) :**Exemple : 1er cas : $\infty \times 0$:**

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$

On sait que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

La suite $u_n \times v_n$ est donc une suite sur le schéma : $+\infty \times 0$

Or $u_n \times v_n = n^2 \times \frac{1}{n} = n$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = +\infty$.

Exemple : 2ème cas : $\infty \times 0$:

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$

On sait que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

La suite $u_n \times v_n$ est donc une suite sur le schéma : $+\infty \times 0$

Or $u_n \times v_n = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow 0} u_n \times v_n = 0$.

Propriété : Forme indéterminée $\infty \times 0$

Selon les situations, le schéma $\infty \times 0$ ne donne pas la même limite.

On ne peut donc pas donner un résultat général pour ce schéma. C'est une nouvelle forme **Indéterminée**.

Propriété : Tableau récapitulatif des produits de limites (admis)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n =$	$L \times L'$	∞	∞	FI

S'évaluer

QCM n°6

Remarque : Attention !

Pour les infinis, on applique la règle des signes.

Attention, le produit d'une limite qui tend vers zéro et d'une suite qui tend vers l'infini donne une Forme Indéterminée

Méthode : Lever une indétermination : $+\infty \times 0$ Niveau *

On factorise encore souvent chaque facteur par son terme de plus haut degré

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$ par $u_n = (n^2 - 1) \left(\frac{2}{n-2} \right)$.



Correction pdf



Correction vidéo

4.3 Limite d'un quotient (propriétés admises) :

Exemple : 1er cas : $\frac{\infty}{\infty}$:

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = n^2$ et $v_n = n$.
 $\frac{u_n}{v_n} = n$ donc on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.



Vidéo de cours

Exemple : 2ème cas : $\frac{\infty}{\infty}$:

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = n$ et $v_n = n^2$
 $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n}$ donc on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Propriété : Forme indéterminée !

Les deux cas $\frac{\infty}{\infty}$ n'ont pas la même limite, on ne peut donc pas donner un résultat général pour ce schéma.
 C'est une nouvelle **forme Indéterminée**.

Propriété : Tableau récapitulatif des quotients de limites (admis) :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	L	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	∞	0	L	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	0	∞	∞	FI

S'évaluer

QCM n°7

Remarque : Règle des signes :

On applique la règle des signes si besoin, selon le signe de L et de l'infini.

Méthode : Lever une indétermination : $+\infty \times 0$ Niveau *

On factorise encore et encore (!!) chaque élément par son terme de plus haut degré

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^2 + 2}{2n^2 - 1}$.



Correction pdf



Vidéo de cours

5 Limites et comparaisons :

5.1 Théorèmes de comparaison (admis)

Théorème : Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur \mathbb{N} .

Si, à partir d'un certain rang N , on a $u_n < v_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$



Vidéo de cours

Remarque : évident !

Si une suite est supérieure à une suite qui tend vers l'infini, elle tend elle même vers l'infini.

Ce résultat qui paraît inutile est en réalité très pratique.

On pourra essayer de comparer la suite qu'on étudie à une suite connue dont on sait que la limite est l'infini.

Théorème : Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur \mathbb{N} .

Si, à partir d'un certain rang N , on a $v_n < u_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

S'évaluer



QCM n°8

Méthode : Lever une indétermination avec un théorème de comparaison. Niveau *

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + \sqrt{2n^3 + 3n^2 + 4n + 5}$.



Correction

5.2 Théorèmes d'encadrement ou des gendarmes. (admis)

Théorème : Théorème des gendarmes

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) , trois suites définies sur \mathbb{N} .

Si à partir d'un certain rang N on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L \in \mathbb{D}$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

S'évaluer



QCM n°9

Méthode : Lever une indétermination avec le théorème des gendarmes. Niveau *

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{5 + \cos(n)}{n}$.

.....

.....

.....

.....

.....



Correction pdf



Correction en vidéo