Extraits d'annales Bac :
Suites arithmético-géométrique

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$.
   On précisera la valeur de v_0.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	Tant que .....
ligne 4	$n \leftarrow n+1$
ligne 5	$u \leftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

   a. Recopier et compléter la ligne 3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 85$.
   b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   c. Retrouver par le calcul le résultat de la question précédente en résolvant l'inéquation $u_n \geqslant 85$.
4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.
   En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.
   Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :
   - d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
   - chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

   a. Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.
   b. Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.
   c. Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ?
   Argumenter la réponse.

Exercice 2

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018.
À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n-ième mois. On a $u_0 = 20$.

1. a. Montrer que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1er mois est de 35 €.
   b. Calculer u_2.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 20$.
   On considère l'algorithme suivant :

```
U ⟵ 20
N ⟵ 0
Tant que U < 70
        U ⟵ 0,75 × U + 20
        N ⟵ N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme. On ajoutera autant de colonnes que nécessaire à la place de celle laissée en pointillés. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de U	20	.....		
Valeur de N	0	.....		
Condition $U < 70$	vrai	.....	vrai	faux

b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 80$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,75$.

b. Préciser son premier terme v_0.

c. En déduire que, pour tout entier n, $u_n = 80 - 60 \times 0,75^n$.

d. Déterminer, au centime près, le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019.

e. Déterminer la limite de la suite (v_n).

f. En déduire la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.