Plab de travail

Lois de probabilités discrètes

3 Probabilités

1 Variable aléatoire

Exercice 1

On définit une variable aléatoire Y avec la règle de jeu suivante :

- Un joueur gagne 8 € pour trois « pile » successifs.
- Il ne gagne rien s'il obtient deux « pile » .
- Il perd 2 € dans tous les autres cas.

1) Déterminer les valeurs prises par Y
2) Déterminer les issues correspondant à l'événement $Y = -2$.
En déduire $p(Y = -2)$
3) Déterminer $p(Y \geqslant 0)$

Exercice 2

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance deux dés cubiques équilibrés et on fait la somme des chiffres obtenus.
Un joueur gagne 10 € s'il obtient 12, il gagne 3 € si la somme des chiffres est un nombre impair, sinon le joueur perd 5 €.

1) Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
2) Déterminer la loi de probabilité sur Ω
3) On définit une variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le montant du gain. Déterminer la loi de probabilité de X

Exercice 3

Considérons un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On convient que :

- si la face 6 apparaît on gagne 5 €
- si la face 5 apparaît on gagne 3 €
- si la face 4 apparaît on gagne 1 €
- sinon on perd 2 €

On définit la variable aléatoire X qui a chaque issue de associe le gain obtenu.
Déterminer $E(X)$

2 Loi uniforme

Exercice 4

Une boite contient 5 jetons portant le numéro 1, 5 jetons portant le numéro 2 et 5 jetons portant le numéro 3.
On tire au hasard un jeton dans la boite et on note X le numéro du jeton tiré.
X suit-il une loi uniforme discrète ?

Exercice 5

On lance un dé cubique à 6 faces. On gagne 1 euro si on tombe sur une face paire et 2 euros si on tombe sur une face impaire. On note X le gain.
X suit-il une loi uniforme discrète ?

Exercice 6

Une variable aléatoire admet la loi de probabilité suivante dont il manque une case :

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,3	

X peut-elle suivre une loi uniforme discrète ?

Exercice 7

On lance deux dés à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au plus grand des nombres obtenus.
X suit-elle une loi uniforme discrète ?

Exercice 8

En France, la proportion de daltoniens est de 8% parmi les hommes et de 0,4% parmi les femmes. Sachant qu'il y a 52% de femmes en France, déterminer la probabilité qu'une personne daltonienne soit une femme.

Exercice 9

Suite à des problèmes de production, un fabricant de tablettes de chocolat met en place une nouvelle chaîne de production : l'ancienne chaîne ne prend désormais en charge que 40% de la production.
Un contrôle qualité montre que :
- parmi les tablettes produites par l'ancienne chaîne, 68 % sont commercialisables,
- parmi les tablettes produites par la nouvelle chaîne, 90 % sont commercialisables.
On choisit une tablette au hasard dans la production.
1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la tablette provienne de la nouvelle chaîne de production et soit commercialisable. 3. La tablette tirée au sort n'est pas commercialisable.
Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la nouvelle chaîne ?

3 Épreuve de Bernoulli

Exercice 10

Dans un lycée, il y a 11 professeurs de mathématiques parmi les 100 professeurs. On tire au sort un professeur parmi ces 100 et on considère la variable aléatoire M donnant le nombre de professeurs de mathématiques obtenu.
1. Justifier que M suit une loi de Bernoulli et donner son paramètre p.
2. Donner l'espérance de M.

Exercice 11

On lance 3 fois successivement une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,75 et on s'intéresse au nombre de PILE obtenus.
1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on précisera n le nombre de répétitions et p, la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois PILE.

Exercice 12

Sylvain joue 3 fois de suite à un jeu vidéo sur son téléphone pour lequel sa probabilité de succès est $0,1$.
1. Quelle hypothèse doit-on faire sur chaque partie pour que ces 3 parties soient assimilables à un schéma de Bernoulli ?
2. Quelle est la probabilité qu'il perde ces 3 parties ?

4 Loi binomiale

Exercice 13

On lance cinq fois de suite de façon indépendante une pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de « face » obtenu.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2) Calculer la probabilité
   a) d'obtenir exactement trois fois « face ».
   b) de n'obtenir aucune fois « face ».
   c) d'obtenir au moins une fois « face ».

Exercice 14

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,78$. Calculer avec la calculatrice :
a) $p(X < 75)$ b) $p(X > 79)$
c) $p(X \geqslant 74)$ d) $p(73 < X \leqslant 81)$

Exercice 15

On lance six fois de suite un dé et on s'intéresse uniquement au fait d'obtenir « 5 ou 6 » ou « ni 5, ni 6 ». On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où on obtient « 5 ou 6 ».

Exercice 16

On tire 15 cartes avec remise dans un jeu de 52 cartes et on considère la variable aléatoire T qui donne le nombre de «trèfle » obtenus.
1. Justifier que T suit une loi binomiale.
2. Calculer $p(T = 5)$.

Exercice 17

Une urne contient des jetons noirs et des jetons blancs. Le nombre de jetons noirs est le triple du nombre de jetons blancs.

1) On tire au hasard un jeton. Quelle est la probabilité que ce jeton soit noir ?
2) On tire à présent 4 jetons successivement avec remise et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de jetons noirs obtenu.
   a) X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, en donner les paramètres.
   b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 jetons noirs ?
   c) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 ou 3 jetons noirs ?
   d) Quelle est l'espérance de X ? Que représente ce nombre ?

Exercice 18

Dans une fabrication d'objets en série, 8 % de ces objets présentent un défaut. Un carton contient 10 objets. La présence d'un défaut pour un objet est indépendante de l'objet choisi.

1) Calculer la probabilité que, dans le carton, les dix objets soient sans défaut.
2) Calculer la probabilité que, dans le carton, au moins 8 objets soient sans défaut.

Exercice 19

Un vendeur est chargé de démarcher des clients au téléphone. Il téléphone à 10 personnes par jour. On admet que la probabilité qu'une personne passe commande est de $\frac{1}{15}$ et que les décisions des personnes contactées sont indépendantes. X est le nombre de personnes qui passent commande en une journée.

1) Exprimer $p(X = k)$ en fonction de k (pour k entier compris entre 0 et 10).
2) Calculer l'espérance de X.
3) Le vendeur gagne 100 euros par commande passée. Quel gain moyen le vendeur peut-il espérer ?

Exercice 20

Vous jouez avec un ami de même force que vous à un jeu. Les résultats de deux parties sont indépendants. Qu'est-ce qui est le plus probable :

- « gagner deux parties sur quatre »
- « gagner quatre parties sur huit »

Exercice 21

On s'intéresse au nombre d'enfants d'une famille. On suppose qu'il n'y a pas de naissances multiples et qu'il y a équiprobabilité pour la naissance d'un garçon ou d'une fille.

Partie A

On suppose que la famille a eu 4 enfants et on note X le nombre de filles.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2) Calculer la probabilité que la famille ait eu au moins une fille.

Partie B

On cherche à déterminer le nombre minimum d'enfants que la famille devrait avoir pour que la probabilité d'avoir au moins une fille soit supérieure à 0.99
.

1) On note n le nombre d'enfants. Déterminer, en fonction de n, la probabilité d'avoir au moins une fille.
2) Montrer que répondre au problème posé revient à déterminer le premier entier n tel que $0.5^n \leqslant 0.01$.

Exercice 22

On considère les expériences « lancer une pièce équilibrée » et « lancer deux fois de suite une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir FACE est 0,2 ».
Si l'on réalise ces deux expériences un grand nombre de fois, laquelle choisir pour obtenir en moyenne le plus de fois FACE ?

5 Loi géométrique

Exercice 23

On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir FACE est 0,2 et on appelle F la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires.
1. Justifier que F suit une loi géométrique et en donner le paramètre.
2. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin d'exactement trois essais pour obtenir FACE.
3. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin de quatre essais ou moins pour obtenir FACE.
4. Combien de lancers peut-on « espérer» faire pour obtenir FACE ?

Exercice 24

On note X le nombre cartes qu'il faut tirer avec remise dans un jeu de 32 cartes pour avoir un premier As.

1) Justifier que X suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
2) Calculer la probabilité qu'il faille tirer **exactement 6 cartes** pour avoir un premier As.
3) Calculer la probabilité qu'il faille tirer **plus de 6 cartes** pour avoir un premier As.
4) Calculer la probabilité qu'il faille tirer **au plus 6 cartes** pour avoir un premier As.

Exercice 25

Sur le trajet d'un automobiliste se trouvent 10 feux tricolores numérotés de 1 à 10.
On suppose que la probabilité qu'un feu soit rouge ou orange lorsqu'il se présente est égale à $0,6$ et que les feux sont indépendants les uns des autres.
On note X le numéro du premier feu rouge et orange rencontré par l'automobiliste.

1) Justifier que X suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
2) Quelle est la probabilité que les 4 premiers feux rencontrés soient verts.

Exercice 26

On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un nombre strictement supérieur à 3 lorsque l'on lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12.
On admet que X suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{9}{12} = 0,75$.
Si on n'a pas obtenu de nombre strictement supérieur à 3 après cinq essais, quelle est la probabilité qu'il faille plus de sept essais pour en obtenir un ?

(Correction)

Corrigé de l'exercice 4

On a

x_i	1	2	3
p_i	1/3	1/3	1/3

Donc X suit une loi uniforme discrète sur $\{1; 2; 3\}$.

Corrigé de l'exercice 5

On a

x_i	1	2
p_i	0,5	0,5

Donc X suit une loi uniforme discrète sur $\{1; 2\}$.

Corrigé de l'exercice 6

La loi de probabilité complète est :

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,3	0,4

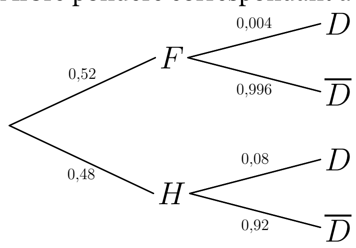
Il n'y a pas équiprobabilité donc X ne suit pas une loi uniforme discrète.

Corrigé de l'exercice 7

On aurait $p(X = 1) = 1/36$ (seul cas favorable sur les 36 cas possibles : les deux dés donnent 1), mais par exemple $p(X = 2) = 3/36$ (1^er^ dé à 1 et 2^e^ dé à 2 ; 1^er^ dé à 2 et 2^e^ dé à 1 ; les 2 dés à 2 : 3 cas favorables).
Il n'y a pas équiprobabilité donc X ne suit pas une loi uniforme discrète.

Corrigé de l'exercice 8

Arbre pondéré correspondant à la situation :



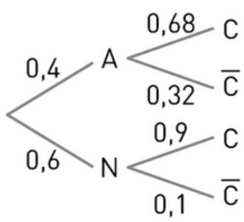
Probabilité demandée :
$p_D(F) = \dfrac{p(F\cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,52\times 0,004}{0,52\times 0,004 + 0,48\times 0,08} \approx 0,05$

Corrigé de l'exercice 9

1. On considère les événements suivants.

A : «La tablette est produite par l'ancienne chaîne», N : «La tablette est produite par la nouvelle chaîne» C : «La tablette est commercialisable ».

2. $p(\mathrm{N}\cap \mathrm{C}) = 0,6\times 0,9 = 0,54$.



3. On cherche

$$p_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{N}) = \frac{p(\overline{\mathrm{C}}\cap \mathrm{N})}{p(\overline{\mathrm{C}})} = \frac{0,6\times 0,1}{0,4\times 0,32 + 0,6\times 0,1} = \frac{0,06}{0,188}$$
$$\approx 0,319.$$

Corrigé de l'exercice 10

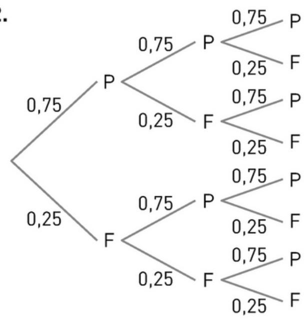
1. M peut être égal à 1 avec une probabilité $\dfrac{11}{100} = 0,11$ ou à 0 avec une probabilité $0,89$ donc M suit une loi de Bernoulli et son paramètre est $p = 0,11$.

2 On applique la formule du cours. $E(M) = p = 0,11$.

Corrigé de l'exercice 11

1. On considère une succession de 3 expériences de Bernoulli en considérant qu'un succès est : «Obtenir PILE » par exemple, identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est 0,75 donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0,75$.
2. Arbre pondéré correspondant à la situation :

2.



3. La probabilité d'obtenir exactement une fois PILE est $3\times 0,75\times 0,25^2 = 0,14062514^e, 6^e$ et 7^e chemins en partant du haut).

Corrigé de l'exercice 12

1. On doit supposer que toutes les parties sont indépendantes.
2. Si on fait un arbre, il y a un seul chemin correspondant à 3 parties perdues et toutes les pondérations inscrites dessus sont 0,9 donc cette probabilité est $0,9^3 = 0,729$.

Corrigé de l'exercice 13

1) Cela revient à répéter 5 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « face » ($p = 0,5$) ; « pile » $(1 - p = 0,5)$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,5$.
2) $p(X = 3) = \binom{5}{3}\times 0,5^3\times 0,5^2 = 0,3125$
3) $p(X = 0) = (0,5)^5 = 0,03125$
4) $1 - p(X = 0) = 1 - 0,03125 = 0,96875$

Corrigé de l'exercice 14

a) Environ 0,197.
b) Environ 0,366.
c) Environ 0,861.
d) Environ 0,66.

Corrigé de l'exercice 15

1) Cela revient à répéter 6 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « 5 ou 6 » ($p = 1/3$); « ni 5, ni 6 » ($1 - p = 2/3$) . Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 1/3$.
2) $p(X = 2) = \binom{6}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0,329$

Corrigé de l'exercice 16

1. T donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 15$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès correspond à : «Obtenir un trèfle ») de paramètre $p = 0,25$ donc T suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,25$.

2.
$$\begin{aligned} p(T = 5) &= \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} \times 0,25^5 \times 0,75^{15-5} \\ &= \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} \times 0,25^5 \times 0,75^{10} \approx 0,17 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 17

Une urne contient des jetons noirs et des jetons blancs. Le nombre de jetons noirs est le triple du nombre de jetons blancs.

1) $\frac{3}{4}$
2) a) Cela revient à répéter 4 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « noir » ($p = 3/4$); « blanc » ($1 - p = 1/4$) . Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 3/4$.
   b) $p(X = 2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \approx 0,2109$
   c) $p(X = 2) + p(X = 3) \approx 0,2109 + \binom{4}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \approx 0,6328$
   d) $E(X) = n \times p = 4 \times \frac{3}{4} = 3$. Cela représente le nombre moyen de jetons noirs que l'on peut espérer si on répète le tirage de 4 jetons un grand nombre de fois.

Corrigé de l'exercice 18

1) Si on note X le nombre d'objets sans défaut, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,92$.
   Probabilité que les dix objets soient sans défaut $= p(X = 10) = 0,92^{10} \approx 0,4344$.
2) Probabilité qu'au moins 8 objets soient sans défaut $= p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) = \binom{10}{8} \times 0,92^8 \times 0,08^2 + \binom{10}{9} \times 0,92^9 \times 0,08^1 + 0,92^{10} \approx 0,9599$

Corrigé de l'exercice 19

1) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{15}$.
   $p(X = k) = \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{15}\right)^k \times \left(\frac{14}{15}\right)^{10-k}$.
2) $E(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{15} \approx 0,667$.
3) Gain moyen $\approx 100 \times 0,667 \approx 66,7$

Corrigé de l'exercice 20

Notons X le nombre de parties que l'on gagne.

- Premier cas : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,5$.
  Probabilité de « gagner deux parties sur quatre » $= p(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,5^2 \times 0,5^2 = 0,375$
- Second cas : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,5$.
  Probabilité de« gagner quatre parties sur huit » $= p(X = 4) = \binom{8}{4} \times 0,5^4 \times 0,5^4 \approx 0,273$

Le premier cas est le plus probable.

Corrigé de l'exercice 21

Partie A

1) Cela revient à répéter 4 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « fille » ($p = 0,5$); « garçon » ($1 - p = 0,5$) . Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,5$.
2) $1 - p(X = 0) = 1 - 0,5^4 = 0,9375$

Partie B

1) $1 - p(X = 0) = 1 - 0,5^n$
2) $1 - 0,5^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,99 \geqslant 0,5^n \Leftrightarrow 0,5^n \leqslant 0,01$.
3) $n \geqslant \frac{\ln 0,01}{\ln 0.5} \approx 6,6$.

Corrigé de l'exercice 22

Soit A la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus si on lance une pièce équilibrée. A suit la loi $\mathcal{B}(0;5)$ donc, en moyenne, on obtient $E(A) = 0,5$ FACE quand on fait un grand nombre de lancers.

Soit B la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus si on lance deux fois la pièce truquée. B suit la loi $\mathcal{B}(2;0,2)$ donc, en moyenne, on obtient $E(B) = 0,4$FACE quand on fait un grand nombre de lancers.

Il faut donc privilégier le lancer de la pièce non truquée.

Corrigé de l'exercice 23

1. F donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès : «Obtenir FACE », lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'être un succès est 0,2 .
Donc F suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,2$.
2. $p(F = 3) = (1 - 0,2)^{3-1} \times 0,2 = 0,128$.
3. $p(F \leqslant 4) = 1 - (1 - 0,2)^4 = 0,5904$.
4. $E(F) = \frac{1}{0,2} = 5$ donc on peut « espérer » obtenir FACE en cinq essais.

Corrigé de l'exercice 24

Corrigé de l'exercice 25

Corrigé de l'exercice 26

On cherche $p_{X>5}(X > 7)$

On applique $p_{X>s}(X > s + t) = p(X > t)$.

$p_{X>5}(X > 5+2) = p(X > 2) = (1-0,75)^2 = 0,25^2 = 0,0625$ d'après la propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique.