Parcours d'exercices

Fonctions dérivées

7

ANALYSE

Ce parcours d'exercices appartient à : ....

Parcours 1

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 24 →

Parcours 2

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 24 →

1 Fonctions dérivées

Exercice 1

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

1) $f(x) = 3x^4 - x^3 - 4$

2) $h(x) = 3x(2x+3)$

3) $t(x) = 2x + 5 + \dfrac{4}{x}$

4) $u(x) = x\sqrt{x}$

Exercice 2

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9$

2) $h(x) = x(3x-7)$

3) $\ell(x) = \dfrac{2}{x} - x$

Exercice 3

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

1) $h(x) = \dfrac{-4}{2-6x}$

2) $s(x) = \dfrac{4x+5}{1-2x}$

Exercice 4

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1) $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{10\,x - 3}$

2) $g : x \longmapsto \dfrac{x+3}{9\,x - 9}$

MathALÉA

Exercice 5

Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies par :

1) $g(x) = x^2\sqrt{x}$

2) $h(x) = \dfrac{3}{x^3+1}$

3) $\ell(x) = \dfrac{5x^2}{2x+1}$

Exercice 6

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1) $f : x \longmapsto \sqrt{8\,x+2}$

2) $g : x \longmapsto (7\,x+1)^9$

MathALÉA

Exercice 7

Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$
par $h : x \mapsto \sqrt{3x-1}$
Déterminer sur quel ensemble elle est dérivable puis déterminer sa dérivée.

Sesamath

Exercice 8

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$
par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dont la fonction dérivée f' est définie pour tout réel x par : $f'(x) = 6x + 7$

1. Déterminer une expression possible de $f(x)$ et en déduire les réels a et b.
2. Sachant que la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(1;6)$, en déduire le réel c.

Sesamath

2 Études de variations

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5x^2 - 11x + 12$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
2. Étudier, pour tout réel x, le signe de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Sesamath

Exercice 10

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ par

$$h(x) = 7 - \frac{10}{5-x}$$

1. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ et calculer $h'(x)$.
2. Étudier, pour tout réel $x \neq 5$, le signe de $h'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$.

Sesamath

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + mx$$

où m est un réel. Pour quelles valeurs de m la fonction f est-elle strictement croissante sur $\mathbb{R}$?

Sesamath

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$; f et g sont des fonctions définies par $f : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + 8x - 8$ et $g : x \mapsto 3x + 1$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans ce repère .
Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'ensemble D.

Sesamath

Exercice 13

On définit la fonction f sur $I = [0; 2]$ par

$$f(x) = \frac{-5}{x^2 + x - 12}$$

La fonction f admet-elle un minimum local sur I ?

Sesamath

Exercice 14

Soit g la fonction définie sur par

$$g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 56x - 24$$

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et déterminer sa fonction dérivée g'.
2. Étudier, pour tout réel x, le signe de $g'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Sesamath

Exercice 15

Soit g la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 - x^2 - x$$

1. Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée g'.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.

Sesamath

Exercice 16

Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 9[\cup]9; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{3x+1}{x-9}$$

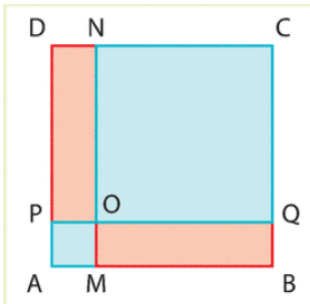
1. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]-\infty; 9[\cup]9; +\infty[$ et déterminer sa dérivée g'.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]-\infty; 9[\cup]9; +\infty[$.
3. En déduire les variations de g sur $]-\infty; 9[\cup]9; +\infty[$.

Sesamath

3 S'entraîner/Chercher

Exercice 17

Un carré $ABCD$ de 5 cm de côté est partagé par deux carrés bleus AMOP et OQCN suivant le schéma ci-dessous :



Le point P sur le segment $[AD]$ est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle 90°.
On pose $AM = x$.
On cherche à déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$ pour laquelle l'aire du domaine bleu est minimale.
1. À quel intervalle I appartient le réel x ?
2. Soit $g(x)$ l'aire du domaine bleu en fonction de x. Montrer que, pour tout réel x de I, on a :

$$g(x) = 2x^2 - 10x + 25$$

3. Justifier que la fonction g est dérivable sur I et déterminer $g'(x)$ pour tout x de I.
4. En déduire les variations de g sur I et la valeur de x pour laquelle l'aire est minimale.

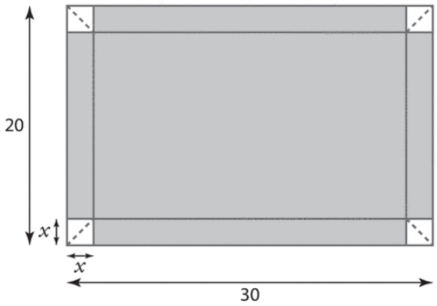
Sesamath

Exercice 18

Avec une feuille en carton de 20 cm par 30 cm on cherche à construire une boîte (sans couvercle !) en forme de pavé droit.
Pour cela, on doit dessiner quatre carrés de même dimension x, aux quatre coins de la feuille, que l'on découpera suivant la diagonale (en pointillé) afin de pouvoir plier (selon les traits pleins) et faire se rejoindre les quatre « côtés» de la boîte à l'aide des « languettes» ainsi obtenues.

Sesamath

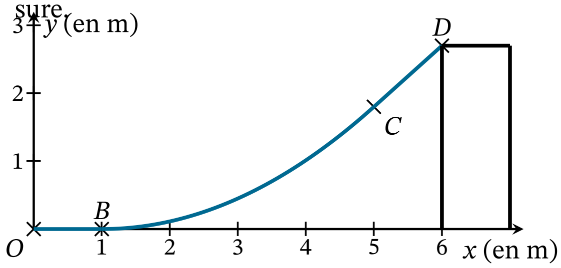
Quelle valeur doit-on prendre pour x afin que le volume de la boîte ainsi formée soit maximal ?



Exercice 19

Une rampe de skateboard est modélisée de la manière suivante :

- une partie horizontale sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$;
- un arc de parabole sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$ représentant la fonction $f\ :\ x \mapsto ax^2 + bx + c$;
- un segment de droite sur l'intervalle $[5\ ;\ 6]$ avec $C(5\ ;\ 1,8)$ et $D(6\ ;\ 2,7)$;
- le raccordement aux points B et C se fait sans cassure.



À l'aide des renseignements fournis, déterminer les valeurs de a, b et c.

Exercice 20

Une entreprise fabrique et vend des montres.
Elle en produit chaque jour entre 2 et 24 . On note x le nombre de montres produites et vendues par jour.
On appelle $C(x)$ le coût total journalier de fabrication en euros.
La fonction C est définie par

$$C(x) = x^2 - 4x + 169$$

On appelle coût unitaire moyen $C_m(x)$ le coût de fabrication d'une montre lorsqu'on en produit x. Il est donné par $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
1. À quel intervalle I appartient le nombre x ?
2. Démontrer que la fonction C_m est définie sur I par $C_m(x) = x - 4 + \dfrac{169}{x}$.
3. Justifier que C_m est dérivable sur I et déterminer, pour tout réel x de I, $C'_m(x)$.
4. Dresser le tableau de signes de $C'_m(x)$ sur I.

5. En déduire le nombre de montres que l'entreprise doit fabriquer pour avoir un coût moyen minimal.

Sesamath

Exercice 21

Une coopérative fabrique du jus de pomme.
Elle produit entre 0 et 200 litres de jus. Elle a établi que ses coûts de production, en euros, de x dizaines de litres de jus de pommes étaient donnés par la fonction

$$C\ :\ x \mapsto x^2 - x + 10$$

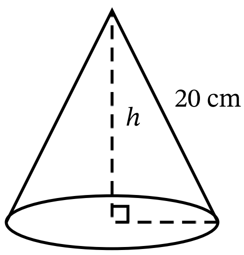
Chaque dizaine de litres produite sera vendue 19€.
1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction C ?
2. On appelle $R(x)$ la recette gagnée par la coopérative pour x dizaines de litres vendus. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
3. On appelle $B(x)$ le bénéfice réalisé par la coopérative lorsqu'elle produit et vend x dizaines de litres de jus de pomme. Quel que soit x, on a $B(x) = R(x) - C(x)$. Montrer que la fonction bénéfice B est définie sur $[0; 20]$ par $B(x) = -x^2 + 20x - 10$
4. Étudier les variations de la fonction B sur $[0; 20]$.
5. En déduire le nombre de litres que la coopérative doit produire afin d'obtenir un bénéfice maximum.

Sesamath

4 Sujets E3C

Exercice 22

On considère un cône de révolution ayant une génératrice de longueur 20 cm et d'une hauteur h en cm.
On rappelle que le volume V en cm^3 d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 et de hauteur h en cm est : $V = \frac{1}{3}\mathcal{A}h$.
Dans cet exercice, on cherche la valeur de la hauteur h qui rend le volume du cône maximum.



1) Exprimer le rayon de la base en fonction de h.
2) Démontrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est :

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left(400h - h^3\right).$$

3) Quelle hauteur h choisir pour que le volume du cône soit maximum ?

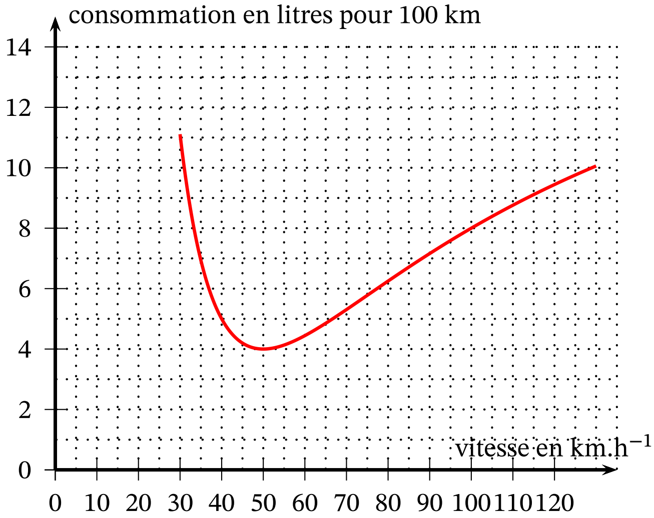
Sujet 6 année 2020

Exercice 23

On s'intéresse à la consommation d'essence d'un véhicule en fonction de sa vitesse.

Lecture graphique

Le graphique ci-dessous représente la consommation d'essence en litres pour 100 km en fonction de la vitesse en km.h^{-1} du véhicule.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1) Quelle est la consommation du véhicule lorsque celui-ci roule à 40 km.h^{-1} ?
2) Pour quelle(s) vitesse(s) le véhicule consomme-t-il 8 litres pour 100 km ?
3) Pour quelle vitesse la consommation du véhicule semble-t-elle minimale ?

Modélisation

Si on note x la vitesse du véhicule en km.h^{-1}, avec $30 \leqslant x \leqslant 130$, la consommation d'essence en litres pour 100 km est modélisée par la fonction f d'expression :

$$f(x) = \frac{20x^2 - 1600x + 40000}{x^2}.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[30 ; 130]$.

4) Montrer que pour tout $x \in [30 ; 130]$,

$$f'(x) = \frac{800\,(2x - 100)}{x^3}.$$

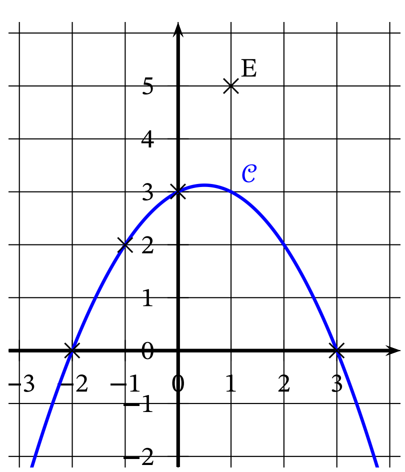
5) Démontrer la conjoncture de la question 3.

Sujet 5 année 2020

Exercice 24

Le plan est muni d'un repère orthonormé. La courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous :

Sujet 7 année 2020



1) Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x.
2) On donne $f'(x) = -x + 0,5$ pour tout réel x.
   Déterminer qu'une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 est $y = 1,5x + 3,5$.
3) On considère le point E de coordonnées $(1 ; 5)$.
   Dans cette question, on cherche à déterminer les points de la courbe $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente passe par le point E.
   a) Montrer que le point E appartient à la tangente T.
   b) Déterminer l'autre point de la courbe en lequel la tangente passe par le point E.

Lien vers les corrigés :

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1) $f'(x) = 12x^2 - 3x^2$

2) $h'(x) = 12x + 9$

3) $t(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2}$

4) $u'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

Corrigé de l'exercice 2

1) $f'(x) = 6x^2 - 6x$

2) $h'(x) = 6x - 7$

3) $\ell'(x) = \dfrac{-2 - x^2}{x^2}$

Corrigé de l'exercice 3

1) $h'(x) = \dfrac{5}{(x+3)^2}$

2) $s(x) = \dfrac{14}{(1-2x)^2}$

Corrigé de l'exercice 4
Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 5

1) $g'(x) = \dfrac{5x^2}{2\sqrt{x}}$

2) $h'(x) = \dfrac{-9x^2}{(x^3+1)^2}$

3) $\ell'(x) = \dfrac{-2 - x^2}{x^2}$

Corrigé de l'exercice 6
Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 7
On pose $X = 3x - 1$.
Ainsi, $f(X) = \sqrt{X}$. f est la fonction racine carrée dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$f'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

Corrigé de l'exercice 8
1. $f(x) = 3x^2 + 7x + c$
2. $c = -4$

Corrigé de l'exercice 9
1. f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(x) = 10x - 11$.
3. On en déduit que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 1,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,1; +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 10
1. $h'(x) = -\dfrac{10}{(5-x)^2}$.
2. Pour tout réel $x \neq 0$, $h'(x)$ est négatif.
3. Donc la fonction h est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 5[\cup]5; +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 11
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$.
Or, $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$. Un trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant Δ est négatif ou nul.
Ici, le coefficient a est égal à 3 , il est donc positif.
Donc : pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \Delta \leqslant 0 \Leftrightarrow 36 - 12m \leqslant 0 \Leftrightarrow m \geqslant 3$.
Donc f est strictement croissante si et seulement si $m \geqslant 3$.

Corrigé de l'exercice 12
$f(x) - g(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 5x - 9$
Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty; 2] \cup [18; +\infty[$. Et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[2; 18]$.

Corrigé de l'exercice 13
$f'(x) = \dfrac{5(2x+1)}{(x^2+x-12)^2}$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{2}$		$0\ 2\ 3$		$+\infty$
$10x+5$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x^2+x-12)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
f		↘	||	↘	$\frac{20}{49}$	↗	||	↗	

Donc sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0; 2]$ la fonction f est strictement croissante et n'admet donc pas de minimum local.

Corrigé de l'exercice 14
1. $g'(x) = -2x^2 + 6x + 56$ 2. et 3.

x	$-\infty$		-4		7		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↗		↘		↗	

Corrigé de l'exercice 15
$g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘	

Corrigé de l'exercice 16

. 1. $g'(x) = \dfrac{-28}{(x-9)^2}$

2. $g'(x)$ est strictement négatif sur $]-\infty; 9[\cup]9; +\infty[$.

3. Donc g est décroissante sur $]-\infty\,; 9[$ et sur $]9; +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 17

1. M est un point du segment $[AB]$, donc $AM \leqslant AB$ et donc $x \leqslant 5$

Donc $x \in [0; 5]$. On a donc $\mathrm{I} = [0; 5]$.

2. L'aire du domaine bleu est égale à la somme de l'aire du carré AMOP et de l'aire du carré OQCN.

Comme $\mathrm{AM} = \mathrm{AP} = x$, alors l'aire du carré AMOP est égale à x^2.

D'autre part, comme $\mathrm{AB} = \mathrm{AD} = 5$ alors $\mathrm{MB} = \mathrm{AB} - \mathrm{AM} = 5 - x$ et $\mathrm{DP} = \mathrm{AD} - \mathrm{AP} = 5 - x$, donc $\mathrm{NO} = \mathrm{OQ} = 5 - x$.

Ainsi l'aire du carré OQCN est égale à $(5-x)^2$.

Donc, pour tout réel x de I, on a :

$$g(x) = x^2 + \left(5 - x^2\right) = x^2 + 25 - 10x + x^2 = 2x^2 - 10x + 25.$$

3. g est une fonction polynôme du second degré, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $I = [0; 5]$.

Et on a, pour tout réel x de I,

$$g'(x) = 2 \times 2x - 10 \times 1 + 0 = 4x - 10$$

4. Or $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 10 = 0 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$ et $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 10 > 0 \Leftrightarrow 4x > 10 \Leftrightarrow x > \dfrac{10}{4} \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{2}$.

On a donc le tableau de signe de $g'(x)$ et le tableau de variations de g ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	$\frac{25}{2}$	↗	

4. Ainsi l'aire du domaine " grisé » est minimale lorsque $x = \dfrac{5}{2}$; c'est-à-dire lorsque le point M est au milieu de $[AB]$.

Corrigé de l'exercice 18

$$5.\ V = L \times l \times \text{ h et } x \in]0; 10[:$$

$$V(x) = (30 - 2x)(20 - 2x)x$$

$$V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$$

V est dérivable sur $]0\,; 10[$:

$$V'(x) = 12x^2 - 200x + 600$$

x	0		$\frac{25-5\sqrt{7}}{3}$		10
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
V	0	↗		↘	0

Corrigé de l'exercice 19

$a = 0,1125$, $b = -0,225$et $c = 0,1125$

Corrigé de l'exercice 20

1. $x \in [2; 24]$

2. $C_m(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 169}{x} = \dfrac{x^2}{x} - \dfrac{4x}{x} + \dfrac{169}{x} = x - 4 + \dfrac{169}{x}$

3. $C'_m(x) = 1 - \dfrac{169}{x^2} = \dfrac{x^2 - 169}{x^2}$

4. $C'_m(x)$ est sous la forme d'un quotient. Comme le dénominateur x^2 est toujours positif, alors le signe de $C'_m(x)$ est le même que celui de son numérateur.

x	2		13		24
signe de $C'_m(x)$ = signe de $x^2 - 169$		$-$	0	$+$	
C_m		↘		↗	

5. L'entreprise doit fabriquer 13 montres pour avoir un coût moyen minimal.

Corrigé de l'exercice 21

1. C est définie sur $[0; 20]$. 2. $R(x) = 19x$ 3. $B(x) = 19x - \left(x^2 - x + 10\right)$ $B(x) = -x^2 + 20x - 10$ 4. $B'(x) = -2x + 20$

x	0		10		20
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B	-10	↗	90	↘	-10

5. La coopérative doit donc produire 10 dizaines de litres, c'est-à-dire 100 litres afin d'obtenir un bénéfice maximum.

Corrigé de l'exercice 22

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 23

$a = 0,1125$, $b = -0,225$et $c = 0,1125$

Corrigé de l'exercice 24

$y = -4x - 5$