Cours & méthodes

Fonction dérivée

7
ANALYSE

1 Introduction et définition

Remarque : Fonction dérivée ??

On voit donc que le signe du nombre dérivé est très important pour étudier les variations d'une fonction. Mais nous n'allons pas nous amuser à calculer le nombre dérivée en tous les points de l'ensemble de définition car nous allons y passer trop temps.
Nous allons donc construire des fonctions qui à x associe le nombre dérivé de f en x.
On nommera cette fonction la fonction dérivée de f.

Définition : Fonction dérivable sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Lorsque pour tout réel x appartenant à I, f est dérivable en x, on dit que f est **dérivable** sur I.

Définition : Fonction dérivée

La fonction qui associe à tout réel x appartenant à I son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f sur l'intervalle I. Elle est notée f'.

Remarque : Attention

L'ensemble de définition de f n'est pas toujours le même que l'ensemble de dérivabilité (ensemble de définition de f'.
Un exemple sera traité dans la suite du cours.

2 Démonstration des dérivées des fonctions de référence

Méthode : Calculer la dérivée d'une fonction affine

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Propriété : Dérivée fonction affine

La fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est $f'(x) = a$

Méthode : Calculer la dérivée de la fonction carré

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Propriété : Dérivée fonction carré

La fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$

Méthode : Calculer la dérivée de la fonction inverse

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Propriété : Dérivée fonction inverse

La fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Méthode : Calculer la dérivée d'une fonction affine

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

Propriété : Dérivée de la fonction racine carrée

La fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque : Attention !!

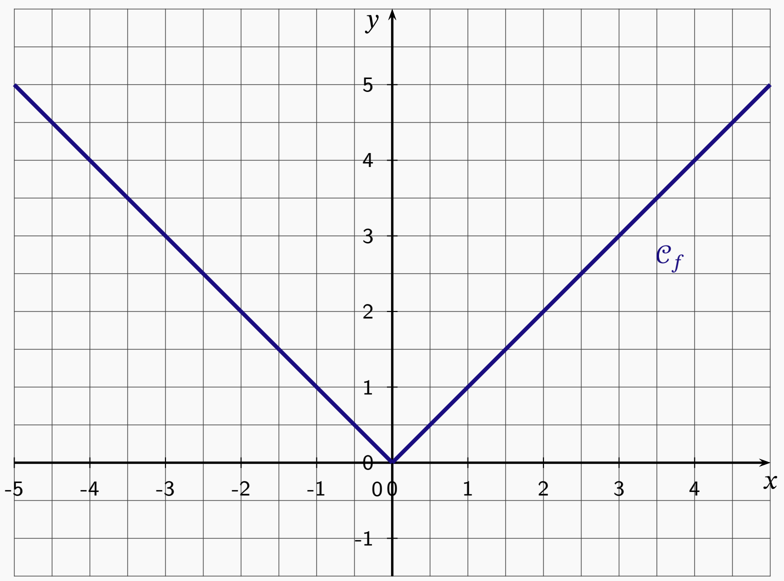
Ici $f'(x)$ existe sur $\mathbb{R}_+^*$ alors que f existe sur $\mathbb{R}^+$
Le domaine de définition de f et celui de f' sont donc différents. Rappelez-vous, nous avons montré que la fonction racine carrée n'était pas dérivable en 0, alors qu'elle est bien définie.

Méthode : Calculer la dérivée de la fonction valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f : x \mapsto |x|$. Est-elle dérivable sur D ?

Remarque : Représentation graphique de la fonction valeur absolue :

Si on regarde la courbe représentative de la fonction f on voit qu'en 0, elle admet deux tangentes différentes. Elle ne semble pas dérivable en 0



Graphiquement, on observe qu'une fonction n'est pas dérivable pour une valeur, quand la courbe change brutalement de direction, sans progressivité. Typiquement, quand la courbe "*forme un angle*".

S'évaluer

QCM 1

3 Récapitulatif des dérivées des fonctions de référence

fonction définie et dérivable sur :	fonction f définie par :	fonction dérivée f' définie par :
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	a
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ (n entier $n \geqslant 1$)	$f'(x) = nx^{n-1}$
$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ (n entier $n \geqslant 1$)	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$]0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Vidéo de cours

Méthode : Appliquer les premières formules des dérivées :

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$. Calculer $f'(x)$.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Calculer $f'(x)$.

Correction pdf

S'évaluer/S'entraîner :

QCM 2

Exercices mathalea

4 Dérivées et opérations

Démonstration fondamentale $(uv)'$

	fonction f définie par :	fonction dérivée f' :
Produit d'une fonction par un réel k	ku	ku'
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Produit	$u \times v$	$u'v+uv'$
Quotient ($v \neq 0$ sur I)	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
Inverse ($v \neq 0$ sur I)	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
Carré	u^2	$2 \times u \times u'$
Puissance ($n \in \mathbb{N}$)	u^n	$n \times u^{n-1} \times u'$

Vidéo de cours

Méthode : Calculer la dérivée d'une fonction :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \left(2+\dfrac{x^2}{3}\right)\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$.
Calculer $f'(x)$.

correction vidéo correction pdf

S'évaluer/S'entraîner :

QCM 3

Exercices mathalea

5 Composées de fonctions

Définition : Composition de fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I, $g(x)$ appartient à J.
La fonction composée de g suivie de f est la fonction h définie sur I par $h(x) = f(g(x))$.

$$x \xmapsto{g} g(x) = X \xmapsto{f} f(X)$$

$$x \xmapsto{\quad h \quad} f\left(g(x)\right)$$

Remarque : Attention au domaine !

Il faut bien être vigilant au domaines de définitions.
L'ensemble de départ correspond aux antécédents de la fonction g. Mais l'ensemble de départ de la fonction f est l'ensemble des images de celui de g !!
Il faut donc s'assurer que les images de g soient des valeurs possibles pour réaliser la fonction f.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{J} = [0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et g la fonction définie sur $\mathrm{I} = [\frac{5}{2}; +\infty[$ par $g(x) = 2x - 5$.
Alors la fonction h, composée de f suivie de g, est définie sur I car

$$\begin{aligned} & x \in \mathrm{I} \\ \Longleftrightarrow\ & x \geqslant \frac{5}{2} \\ \Longleftrightarrow\ & 2x \geqslant 5 \\ \Longleftrightarrow\ & 2x - 5 \geqslant 0 \\ \Longleftrightarrow\ & g(x) \geqslant 0 \\ \Longleftrightarrow\ & g(x) \in \mathrm{J} \end{aligned}$$

$$x \overset{g}{\longmapsto} 2x - 5 = X \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{X}$$

Et on a, pour tout réel x de I,

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x - 5) = \sqrt{2x - 5}$$

Théorème : Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J
et g une fonction affine définie sur un intervalle I par $g(x) = ax + b$
où a et b sont des réels tels que, pour tout réel x de l'intervalle $\mathrm{I}, g(x)$ appartient à l'intervalle J.
Alors la fonction h composée de g suivie de f est dérivable sur I, et on a pour tout réel x de I,

$$h(x) = f(ax + b) \iff h'(x) = a \times f'(ax + b)$$

Méthode : Calculer la dérivée d'une fonction :

Étudier la dérivabilité de la fonction h, définie sur $[\frac{5}{2}; +\infty[$ par

$$h(x) = \sqrt{2x - 5}$$

correction pdf

----

6 Dérivée et variations d'une fonction

Théorème : Théorème fondamental :

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f est constante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) = 0$.
- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \leqslant 0$.

Vidéo de cours

Remarque : Super pratique !

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

Théorème : Réciproque

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' la dérivée de f sur I.

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Théorème : Extrémum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.

- Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

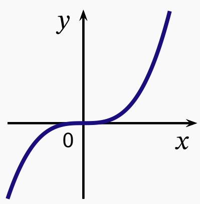
x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	*minimum*	↗	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	*maximum*	↘	

Remarque : On n'oublie pas le changement de signe !!

Dans la proposition 2. du théorème précédent, l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

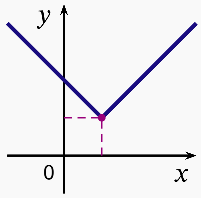
Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
$f'(0) = 0$ donc la dérivée s'annule bien mais pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum local en 0, bien que sa dérivée soit nulle en 0.



Remarque : Attention à la réciproque qui est fausse !

Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-1| + 1$.
f est une fonction affine par morceaux, f admet un minimum $f(1) = 1$ or f n'est pas dérivable en 1.



S'évaluer

QCM 4

7 Synthèse :

Méthode : Étude des variations d'une fonction :

En pratique, pour étudier les variations d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$:

- On détermine la dérivée f' de f ;
- On étudie le signe de f' sur $\mathcal{D}_f$;
- On applique le théorème 2 sur chacun des intervalles de $\mathcal{D}_f$ où le signe de f' est constant ;
- On dresse le tableau des variations en indiquant les extremums, s'il y a lieu et éventuellement les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+5}{x-3}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

correction vidéo correction pdf