

I. Variable aléatoire

1. Définition

Définition

Lorsqu'à chaque issue d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire.

Rappels de cours



Exemple

Une situation classique est d'inventer un jeu d'argent avec un lancé de dé.
A chaque face, on associe un gain ou une perte.
La variable aléatoire est dans cette situation une fonction qui à chaque face associe le gain/la perte.

Définition

Lorsqu'à chaque valeur $x_i (1 \leq i \leq n)$ prise par une variable aléatoire X , on associe la probabilité de l'événement $X = x_i$, on dit que l'on définit la loi de probabilité de X .
On représente généralement cette loi à l'aide d'un tableau :

Valeur x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Remarque

On a alors :

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Méthode n°1 : Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire

Niveau *

Stratégie :

Énoncé :

On lance un dé cubique, non pipé, dont les faces sont numérotées 1, 1, 1, 2, 3 et 4.
Soit X la variable aléatoire donnant le numéro apparu.
Déterminer la loi de probabilité de X .

Correction :

Définition

Lorsqu'à chaque valeur $x_i (1 \leq i \leq n)$ prise par une variable aléatoire X , on associe la probabilité de l'événement $X = x_i$, on dit que l'on définit la loi de probabilité de X .

On représente généralement cette loi à l'aide d'un tableau :

Valeur x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

2. Espérance d'une variable aléatoire

Podcast

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω , qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_k

On appelle espérance mathématique de X notée $E(X)$, le réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i p(X = x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_k \times p_k$$



Vidéo de cours

Remarque

- On retient que, pour un grand nombre de tirages, l'espérance d'une variable aléatoire est la moyenne des valeurs de x_i affectées des fréquences p_i .
- Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $E(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois.
Le signe de $E(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre.
Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est équitable.

Méthode n°2 : Calculer une espérance :

Niveau *

Stratégie :

On applique la définition.

Énoncé :

On considère une variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est donnée par le tableau

y_i	-4	0	4	20
$p(Y = y_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

suivant.
Calculer $E(Y)$.

Correction :

Correction pdf

II. Loi uniforme discrète :

Définition :

La variable X dont les valeurs possibles sont $\{1; 2; \dots; n\}$ suit la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; \dots; n\}$ si la probabilité $p_i = P(X = i)$ est égale à $\frac{1}{n}$ quel que soit i .

Vidéo de cours



Méthode n°3 : Démontrer qu'une variable aléatoire suit la loi uniforme

Niveau *

Stratégie :

Il suffit de prouver l'équiprobabilité.

Énoncé :

On lance un dé à 6 faces non-pipé.
On appelle X la variable aléatoire qui prend la valeur de la face du dessus.
Déterminer la loi suivie par X

Correction :



Correction en pdf

Propriété :

Soit X suit la **loi uniforme discrète** $\{1; 2; \dots; n\}$.
L'espérance mathématiques de X est : $E(X) = \frac{n+1}{2}$.

Démonstration :

Soit X suit la loi uniforme discrète $\{1; 2; \dots; n\}$.

$P(X = i) = \frac{1}{n}$ quel que soit i .

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + \dots + n \times \frac{1}{n}$$

en factorisant par $\frac{1}{n}$, on obtient : $E(X) = \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + n)$

Or on sait (somme des n premier termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1, que :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ d'où } E(X) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Finalement : d'où } E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Exemple :

L'Espérance est à rapprocher à l'idée de moyenne, pour un très grand nombre de tirages.

Si on reprend l'exemple du lancé de dé, avec un grand nombre de tirages, on obtiendra une moyenne de résultat proche de $\frac{6+1}{2} = 3,5$.

$$\text{On a : } E(X) = \frac{6+1}{2} = 3,5$$

III. Loi binomiale

1. Épreuve de Bernoulli

Définition :

On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire n'ayant que 2 issues possibles :

- une appelée "succès" et notée souvent S
- une appelée "échec" et souvent notée $\bar{S}$.

Video de cours



Définition :

Pour une épreuve de Bernoulli, on note p la probabilité de succès.

On note donc $p(S) = p$ et $p(\bar{S}) = 1 - p$

Exemple : Avec un dé.

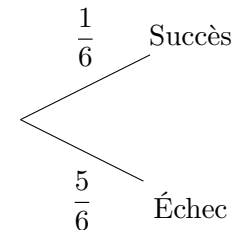
On lance un dé non truqué à six faces et on note

S l'événement "Obtenir un 6".

L'événement $\bar{S}$ est alors "Ne pas obtenir un six".

C'est une épreuve de Bernoulli, où $p = p(S) = \frac{1}{6}$ et $1 - p = p(\bar{S}) = \frac{5}{6}$.

On peut réaliser un arbre à deux branches pour la symboliser :



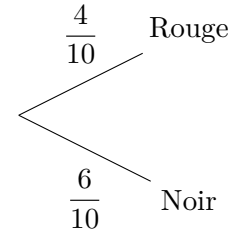
Exemple : Avec une urne.

Dans une urne, on place 4 boules rouges et 6 boules noires.

On gagne quand on obtient une boule rouge.

On estime donc que "obtenir une boule rouge" est un succès.

C'est une épreuve de **Bernoulli**, où la probabilité du succès est $p = 0,4$

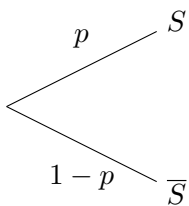


2. Loi de Bernoulli

Définition :

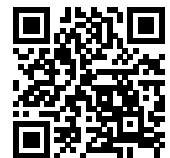
Une loi de Bernoulli est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :

- La probabilité d'obtenir 1 est égale à p
- La probabilité d'obtenir 0 est égale à $1 - p$



$X = x_i$	1	0
$p(X = x_i)$	p	$1 - p$

La variable aléatoire X comptabilise le nombre de succès.

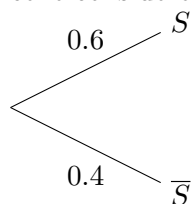


Vidéo de cours

Exemple :

Soit la variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,6 .

Cela signifie que l'expérience aléatoire ne possède que deux issues, avec une probabilité de 0,6 pour celle considérée comme succès.



$X = x_i$	1	0
$p(X = x_i)$	0.6	0.4

Propriété : Espérance d'une loi de Bernoulli :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli alors $E(X) = p$.

Démonstration :

La loi de probabilité de est

$X = x_i$	1	0
$p(X = x_1)$	p	$1 - p$

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

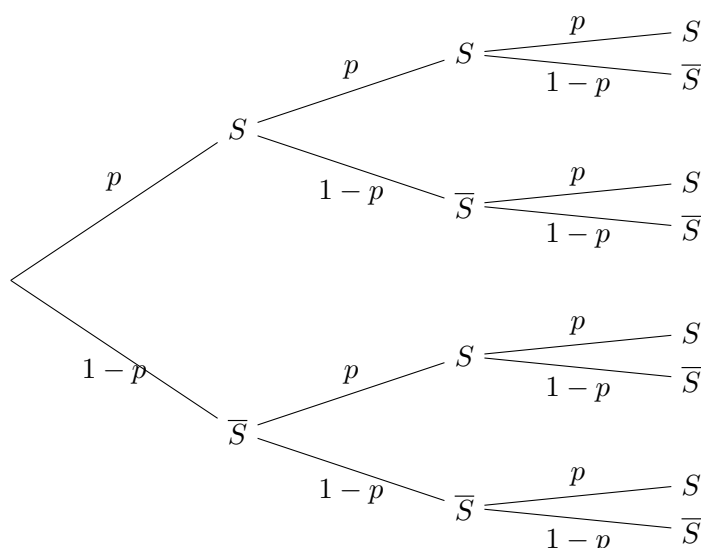
3. Schéma de Bernoulli :

Définition :

On appelle **schéma de Bernoulli** la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**, de probabilité de succès p pour chacune d'entre elles.

Le nombre entier n et le nombre réel p sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

Arbre pondéré pour $n = 3$



Vidéo de cours :



Méthode n°4 : Utiliser la loi de Bernoulli

Niveau *

Stratégie :

Il faut s'appuyer sur un arbre pour modéliser la situation.

Énoncé :

On lance un dé non truqué à six faces trois fois de suite et on note S l'événement "Obtenir un 6".

Quelle est la probabilité de n'avoir aucun 6 en trois tirages ?

Correction :

Correction pdf

Définition

Soit X une variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans schéma de Bernoulli, de paramètres n et p .

On dit alors que X suit **une loi Binomiale** de paramètre n et p . On peut le noter : $X \sim \mathcal{B}(n; p)$

4. Arbre pondéré et variable aléatoire dans un schéma de Bernoulli

Méthode :

Si le paramètre n (nombre d'expériences) est faible (inférieur à 4), on peut dresser un arbre pondéré pour représenter la situation.

Vidéo de cours :

Vidéo de cours

Méthode n°5 : Déterminer une loi Binomiale

Niveau *

Stratégie :

Dans les cas simple, il faut modéliser avec un arbre.

Énoncé :

Une expérience consiste à tirer au hasard 3 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne. La probabilité d'obtenir une boule gagnante est de 0,3 à chaque tirage.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre succès.

Déterminer la loi de probabilité de x .

Correction :

Correction pdf

5. Coefficient binomial :

Définition :

On réalise une expérience suivant une loi de Bernoulli, de paramètre n et p .
 Soit un entier naturel k correspondant au nombre de succès.
 On appelle **coefficient binomial** le nombre de chemin conduisant à succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.
 On le note $\binom{n}{k}$ et on le lit " k parmi n ".

Vidéo de cours :



Méthode n°6 : Calculer des coefficients binomiaux avec un arbre.

Niveau *

Stratégie :

S'appuyer sur un arbre et bien mettre du sens à ce coefficient.

Énoncé :

Sans calcul, déterminer :

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

Correction :

Propriété :

Pour tout entier naturel n :

$$\bullet \binom{n}{n} = 1 \quad \bullet \binom{n}{1} = n \quad \bullet \binom{n}{0} = 1$$

6. Calculs des coefficients binomiaux par dénombrement :

6.1. Calculer par dénombrement :

Méthode

On appelle S succès et E : échec, et on dénombre toutes les possibilités en les combinant.

Vidéo de cours :



Méthode n°7 : Calculer des coefficients binomiaux par dénombrement

Niveau *

Stratégie :

Il faut tester avec méthode, toutes les combinaisons possibles.

Énoncé :

Calculer $\binom{4}{1}$ et $\binom{4}{2}$

Correction :



Correction pdf

6.2. Triangle de Pascal

Principe :

On construit ce triangle, en partant du triangle de départ 1; 1; 1 sur les 2 premières lignes.

Sur les bords, on reporte des 1.

Puis, on reporte la somme de deux nombres voisins au milieu, à l'étage inférieur.

On met ensuite n pour le numéro de lignes, et k pour le rang en colonne, en n'oubliant pas qu'on commence par 0.

$$\begin{array}{ccccccc}
 n = 0 : & & & & 1 & & \\
 n = 1 : & & & 1 & & 1 & \\
 n = 2 : & & 1 & & 2 & & 1 \\
 n = 3 : & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 n = 4 : & 1 & & \dots & & \dots & & \dots & & 1 \\
 n = 5 : & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

Ainsi, on lit : $\binom{4}{2} = \dots$

6.3. Calculs des coefficients binomiaux à la calculatrice :



Tutoriel Numworks



Tutoriel Casio

7. Calculer les probabilités d'une loi binomiale :

Propriété :

On réalise une expérience suivant une loi de Bernoulli, de paramètres n et p . La loi Binomiale de paramètre n et p se définit par

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$



Vidéo de cours

Méthode n°8 : Calculer une probabilité avec la loi binomiale :

Niveau *

Stratégie :

Bien définir les paramètres n , k et p avant d'appliquer le cours.

Énoncé :

Une expérience consiste à tirer au hasard 8 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne.

La probabilité d'obtenir une boule gagnante est de 0,3 à chaque tirage.

Calculer la probabilité d'avoir 3 succès.

Correction :

Correction pdf

Méthode n°9 : Déterminer une loi Binomiale à la calculatrice

Niveau *

Stratégie :

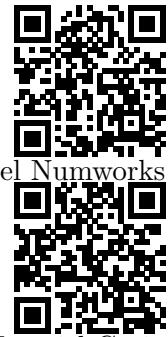
Déterminer la loi de probabilité d'une variable X consiste à déterminer les probabilités de chacune des valeurs de k qui varie de 0 à n , c'est à dire lister :

$$p(X = 0) ; p(X = 1) \quad \dots \quad p(X = n)$$

Énoncé :

X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,3$.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Correction :

Tutoriel Numworks

Tutoriel Casio

8. Espérance d'une loi Binomiale**Définition :**

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p .

Lorsqu'on réalise un grand nombre de fois le schéma de Bernoulli correspondant, la moyenne du nombre de succès se rapproche d'un nombre appelé l'espérance de X , noté $E(X)$.



Vidéo de cours

Propriété :

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .
Alors :

$$E(X) = np$$

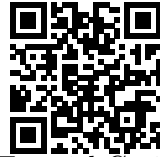
9. Représentation graphique d'une loi Binomiale

Méthode :

On peut représenter graphiquement une loi binomiale par un diagramme en bâtons, en plaçant en abscisses les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnée les probabilités correspondantes. Lorsque n est grand, la courbe forme une cloche, centrée autour de l'espérance de la variable aléatoire.



Tutoriel Numworks



Tutoriel Casio



Tutoriel tableur

IV. Loi géométrique (ou loi dite du premier succès)

Définition :

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité d'un succès est égale à p .
On répète cette expérience jusqu'à obtenir le 1er succès.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais nécessaires jusqu'au premier succès.
On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p .

Interprétation :

L'idée de la loi géométrique, c'est que tant qu'on n'a pas gagné, on répète l'épreuve de Bernoulli.
Le seul paramètre est donc le paramètre de succès.
 $p(X = k)$ permet donc de calculer la probabilité d'avoir le premier succès à la k ème tentative.

Méthode n°10 : Comprendre la loi géométrique

Niveau *

Stratégie :

Il n'y a que le paramètre de la probabilité de succès dans la loi géométrique, puisqu'on ne connaît pas le nombre de tentatives. Celui-ci pouvant à la limite, être infini.

Énoncé :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique, de paramètre $p = 0.5$.
Calculer $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.

Correction :

Propriété :

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p . Pour tout entier naturel k non nul, la loi de probabilité de X est :

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p$$

Pour avoir le premier succès à la k ème tentative, on a eu $k - 1$ échecs consécutifs avant .

Propriété :

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi géométrique de paramètre p . On a :

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Remarque.

Il faut rapprocher l'espérance d'une variable aléatoire à l'idée de moyenne.

Il faut en moyenne $\frac{1}{p}$ tentative pour obtenir un succès.

Méthode n°11 : Utiliser la loi géométrique

Niveau *

Stratégie :

On applique simplement le cours.

Énoncé :

On lance un dé à 6 faces, non truqué. Le jeu s'arrête quand on a obtenu un 6 .

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers de dés nécessaires jusqu'à l'obtention d'un 6 .

- Calculer $P(X = 3), P(X \leq 3)$ et $P(X \leq 8)$.
- Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

Correction :



Correction en pdf

Définition :

La loi géométrique est dite "sans mémoire" car la connaissance du résultat des k premières expériences ne modifie pas les probabilités pour les suivantes.

Exemple :

Si on lance une pièce de monnaie et que l'on considère comme succès "*obtenir pile*".

La probabilité d'obtenir un succès après le 10^{ème} lancer sachant qu'on n' a pas obtenu de succès pour les 4 premiers lancers est égale à la probabilité d'obtenir un succès après le 6^e lancer.

Propriété :

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi géométrique.

Pour tous entiers n et k non nuls, on a :

$$P_{X>k}(X > n + k) = P(X > n)$$