

I. Rappels sur les probabilités

Définition :

L'ensemble de toutes les **issues** (ou **éventualités**) possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de cette expérience aléatoire (souvent noté Ω).

Un sous-ensemble de cet univers s'appelle un **événement**.

Propriété :

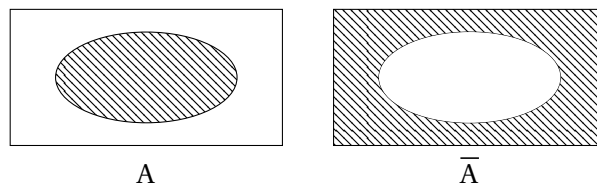
Une probabilité est toujours un nombre compris **entre 0 et 1**.

Dans le cas où toutes les issues sont **équiprobables** (c'est-à-dire qu'elles ont toutes les mêmes chances de se produire), la **probabilité** d'un événement est le quotient :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles dans l'univers}}.$$

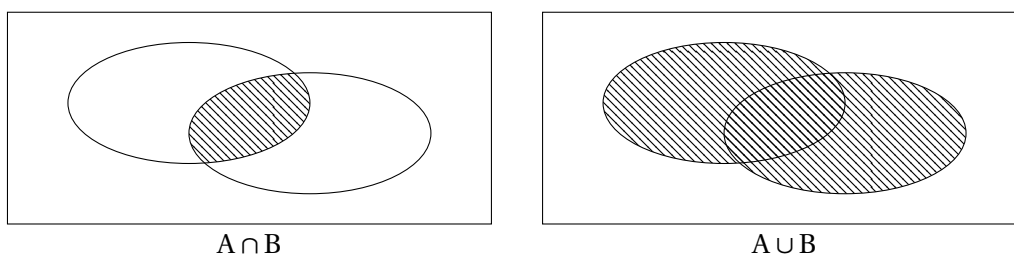
Définition :

L'événement **contraire** (ou complémentaire) $\bar{A}$ d'un événement A se réalise dès que A ne se réalise pas :



L'**intersection** $A \cap B$ (lire « A inter B ») de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque **A ET B** se réalisent *simultanément*.

La **réunion** $A \cup B$ (lire « A union B ») de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque **l'un au moins** des deux événements se réalise (l'un **OU** l'autre **OU** les deux).



Définition :

Quels que soient les événements A et B :

- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$;
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. *Relation fondamentale*

Méthode n° 1 : Vocabulaire et Notations de bases en probabilités

Niveau *

Stratégie :

Bien appliquer le rappel de cours précédent

Énoncé :

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B.

Le tableau ci-dessous présente les résultats de l'étude :

	A	B	Total
Guéri	383	291	674
Non Guéri	72	54	126
Total	455	345	800

On choisit au hasard un patient testé, et on appelle A l'événement « le patient a été traité avec le médicament A » et G : « il est guéri ».

1. Définir les événements $\bar{A}$, $A \cap G$ et $A \cup G$
2. Calculer $p(\bar{A})$ et $p(A \cap G)$.
3. Calculer $p(A \cup G)$ en utilisant la relation fondamentale.

Correction :

Correction pdf

II. Représentation sous forme d'un arbre pondéré**Définition :**

Modélisation d'une suite d'expériences aléatoires Quand on réalise plusieurs expériences aléatoires, on peut modéliser la situation par un **arbre pondéré**, dont chaque branche est affectée d'un poids qui est une probabilité.

Vidéo de cours :**Aie! La boulette**

Trouverez-vous la boulette dans la vidéo de cours??

Exemple :

On propose une expérience aléatoire :

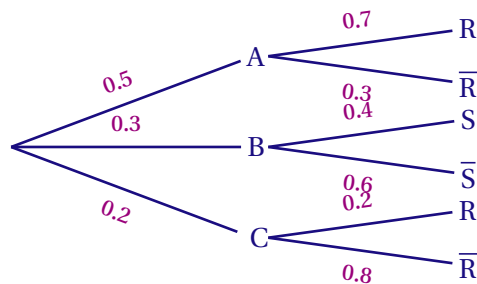
Un utilisateur choisit au hasard une boule dans une urne contenant dix boules indiscernables au toucher.

- 5 sont marquées de la lettre A,
- 3 marquées de la lettre B,
- 2 marquées de la lettre C.

L'utilisateur joue alors une deuxième fois :

- S'il a obtenu A, il rejoue dans une urne contenant 10 boules dont 7 marquées d'un R.
- S'il a obtenu B, il rejoue dans une urne contenant 10 boules dont 4 marquées d'un S.
- S'il a obtenu C, il rejoue dans une urne contenant 10 boules dont 2 marquées d'un R.

En appelant, $\bar{R}$ l'évènement "non-R", $\bar{S}$ l'évènement "non-S", on peut représenter cette expérience par cet arbre pondéré :

**Intersection d'évènements :**

Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'**intersection** des évènements qui le composent.

Exemple :

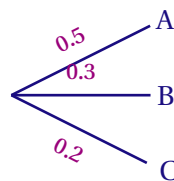
L'évènement qui se compose de A au premier tirage et de R au deuxième est noté $A \cap R$.

Calculs dans un arbre pondéré :**Règle n° 1 :**

La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple :

Voilà l'extrait d'un l'arbre pondéré :



On a bien :

$$p(A) + p(B) + p(C) = 0.5 + 0.3 + 0.2 = 1$$

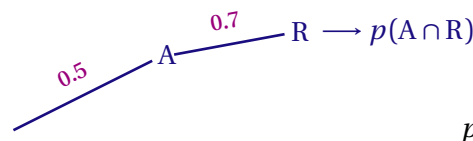
Attention, il y a une coquille dans la vidéo à cet endroit !!

Règle n° 2 :

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.

Exemple :

Voilà l'extrait d'un l'arbre pondéré :



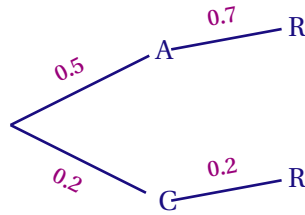
$$p(A \cap R) = 0.5 \times 0.7 = 0.35$$

Règle n° 3 :

La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet évènement.

Exemple :

Voilà l'extrait d'un l'arbre pondéré :



Il y a deux branches qui aboutissent à R :

La probabilité d'avoir R est égale à leur somme :

$$p(R) = p(A \cap R) + p(G \cap R) \\ = 0,5 \times 0,7 + 0,2 \times 0,2 = 0,39$$

Méthode n° 2 : Calculer des probabilités dans un arbre pondéré :

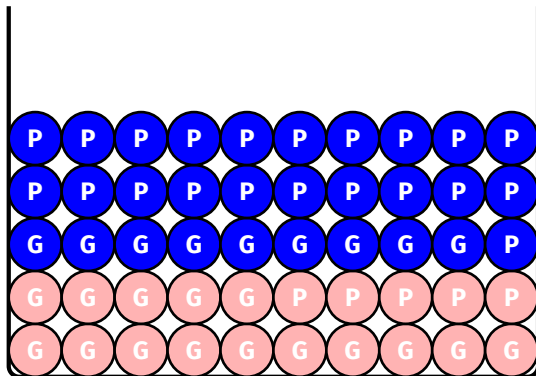
Niveau *

Stratégie :

Bien appliquer les trois règles de calculs

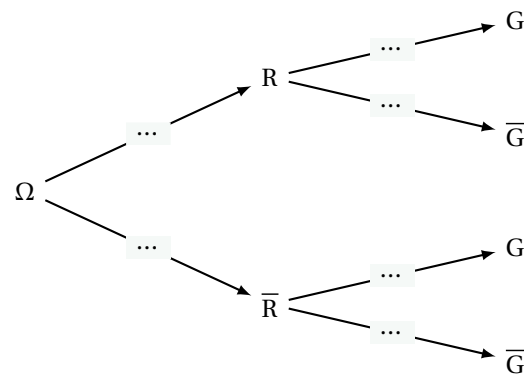
Énoncé :

Un sac contient 20 boules rouges et 30 boules bleues. Chacune d'entre elles porte l'une des mentions « Gagné » ou « Perdu ». 15 boules rouges et 9 boules bleues sont gagnantes. On tire au hasard une boule dans le sac, et on appelle R l'évènement « La boule tirée est rouge » et G « La boule tirée est gagnante ».



Correction :

A partir de l'énoncé, compléter l'arbre pondéré ci-dessous. En déduire $p(R \cap G)$ et $p(G)$.



Correction pdf

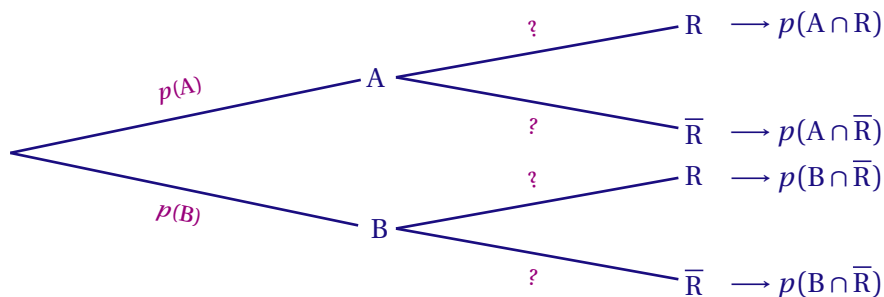
QCM n° 1



III. Probabilités conditionnelles

Introduction :

Dans l'arbre pondéré ci-dessous, on peut lire sur les branches primaires de l'arbre : $p(A)$ et $p(B)$.
On a défini que l'événement A puis R se nomme $A \cap R$ ainsi que sa probabilité : $p(A \cap R)$.



Vidéo de cours

Comment nommer la probabilité de la branche secondaire, qui va de **A** à **R**?

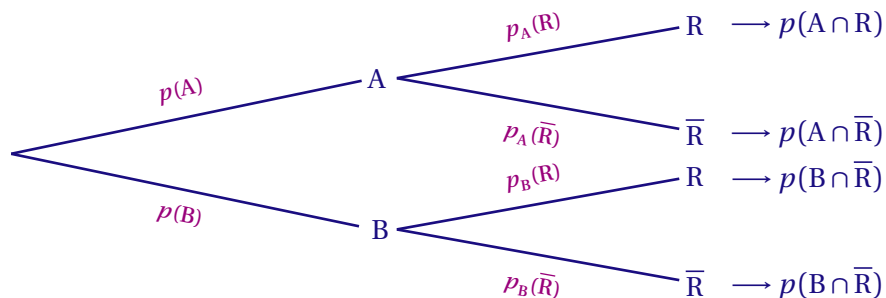
On ne peut pas la nommer $p(R)$ car cela serait ambigu avec la branche issue de B rejoignant R.
Pour distinguer ces deux événements, on doit faire référence à l'issue du premier tirage : A ou B.

On distingue alors l'événement **R sachant A** de l'événement **R sachant B**.

Notation!

On note alors : $p_A(R)$ l'événement R **sachant** A et $p_B(R)$ l'événement R **sachant** B.

On obtient alors cet arbre :



Évident!

Il vient alors avec les propriétés de calculs sur une branche l'égalité suivante :

$$p(A) \times p_A(R) = p(A \cap R)$$

Définition :

Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$.

La probabilité conditionnelle de l'évènement B **sachant** que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$.

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Si $p(B) \neq 0$, on définit de même

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Propriété : Dans un arbre pondéré

Toutes les probabilités de deuxième branche supposent une condition pour la première branche.
C'est donc toujours une **probabilité conditionnelle**.

Méthode n° 3 : Utiliser les probabilités conditionnelles.

Niveau *

Stratégie :

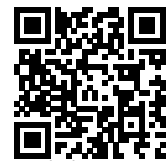
Penser qu'on peut définir deux probabilités conditionnelles, une sachant A et l'autre sachant B.

Énoncé :

A et B sont deux évènements tels que :

$$p(A) = \frac{1}{3} \quad ; \quad p(B) = \frac{1}{2} \quad ; \quad p_A(B) = \frac{1}{4}$$

Déterminer $p_B(A)$.

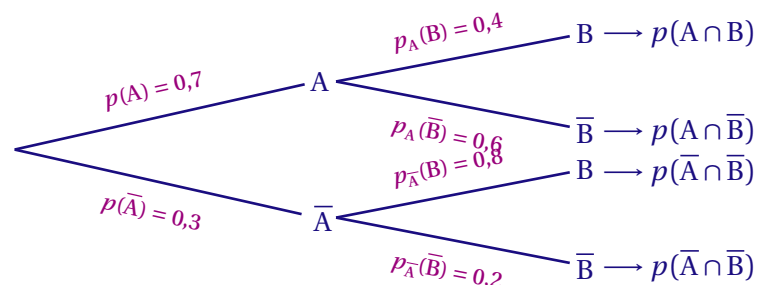
Correction :

Corrigé en vidéo avec rappel de cours

Exemple :

On demande à des élèves de première d'un lycée, s'ils aiment pratiquer l'Athlétisme et le Badminton, respectivement notés A et B.

On représente les résultats sous la forme de cet arbre pondéré :



Notez bien que cette modélisation suppose qu'on a d'abord demandé s'ils aimaient l'athlétisme et ensuite seulement le badminton.

Se repérer dans un arbre :**Branche primaire : probabilité totale**

On a $p(A) = 0,7$ puisqu'il s'agit d'une branche primaire, qui part de l'Univers (ensemble des élèves de première du lycée). C'est le seul chemin qui passe par A. On peut dire que c'est une **probabilité totale** donc 70% des élèves de première du lycée aiment l'athlétisme.

Branche secondaire : probabilité conditionnelle

On a $p_A(B) = 0,4$, il s'agit d'une branche secondaire. Cela représente la proportion d'élève qui aime le badminton, **parmi ceux** qui aiment l'athlétisme. C'est la probabilité d'avoir B **sachant** qu'on est passé par A. Elle ne concerne pas tous les élèves mais uniquement ceux qui aiment l'athlétisme.

Le piège classique !

Attention de bien distinguer l'événement $A \cap B$ de l'événement B sachant A et de de l'événement A sachant B.

- $A \cap B$ représente l'ensemble des élèves qui **aiment l'athlétisme et le badminton**. L'ordre dans lequel on leur a posé la question n'importe pas, on s'adresse à tous les élèves.
- B sachant A correspond à ceux qui aiment le badminton, parmi ceux qui aiment déjà l'athlétisme. Cela suppose qu'un premier tri à été effectué, on ne travaille plus avec l'ensemble des élèves.
- A sachant B correspond à ceux qui aiment le l'athlétisme, parmi ceux qui aiment déjà badminton. Cela suppose qu'un premier tri à été effectué, on ne travaille plus avec l'ensemble des élèves.

QCM n°2**IV. Formule des probabilités totales :****1. Cas de deux évènements****Propriété fondamentale :**

Si A est un évènement de Ω tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})$$

Vidéo de cours :**Preuve :**

Remarquons que :

$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$ et $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$. Il vient : $p(B) = p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B))$

On sait, avec la relation fondamentale des probabilités que, pour tout évènement A et B,

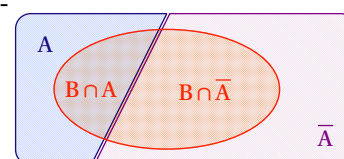
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Considérons les évènements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$.

Appliquons cette relation à ces deux évènements :

$$p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) - p((A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B))$$

Il vient $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$

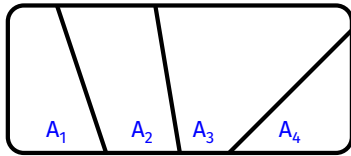


Partition d'un univers :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un ensemble d'événements de probabilités non nulles d'un même univers Ω .

$A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une **partition** de l'univers Ω si, et seulement si, tout événement élémentaire de Ω appartient à l'un des événements A_i et à un seul. C'est à dire si, et seulement si,

- Pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Illustration d'une partition à 4 éléments :

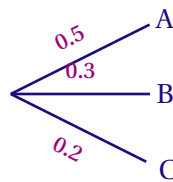
Les 4 événements A_1, A_2, A_3 et A_4 sont tous, deux à deux disjoints. Aucune issue ne peut appartenir à deux de ces ensembles. Toute issue de l'univers appartient uniquement à une seule de ces parties. Il n'existe aucune issue qui ne soit pas dans un de ces 4 événements.

Remarque n° 1 :

Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'événement situé à ce nœud.

Exemple :

Voilà un extrait de l'arbre pondéré de début de cours :



$\{A, B, C\}$ forme une partition de l'univers Ω .

Ils couvrent toutes les possibilités et il n'est pas possible de choisir deux de ces événements.

Remarque n° 2 :

Un événement A de probabilité non nulle et son événement contraire $\bar{A}$ forment une partition de Ω .

Remarque n° 3 :

Si les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω alors $p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = 1$

Généralisation de la formule des probabilités totales :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 si $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout événement B de Ω ,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

Méthode n°4 : Appliquer la formule des probabilités totales

Niveau *

Stratégie :

Bien penser à justifier qu'il y a une partition de l'univers

Énoncé :

Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance.

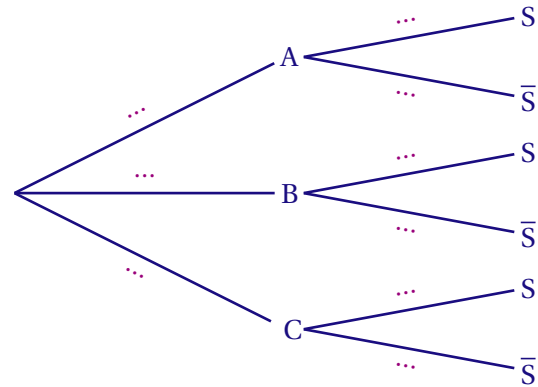
- 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables.
- 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables.
- Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.

On note S l'évènement : « la fiche est celle d'un ordinateur portable »

On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable ?

Correction :

On peut représenter la situation par un arbre pondéré :



Correction pdf

QCM n°3**V. Formule des probabilités composées :****Définition**

Nous avons vu en début de cours que la relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire de la manière suivante

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

Cette écriture s'appelle la *formule des probabilités composées*.

Vidéo de cours**Dans les deux sens!**

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

Cette relation est évidente, si on comprend qu'on peut construire deux arbres différents, en commençant par l'évènement A, ou par l'évènement B

Méthode n° 5 : Utiliser la formule des probabilités composées.

Niveau **

Stratégie :

Bien analyser l'énoncé pour modéliser la situation.

Énoncé :

85 % d'une population est vaccinée contre une maladie. On a constaté que 2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.

Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade?

Correction :



Correction pdf

QCM n° 4



QCM 4

VI. Évènements indépendants :

Définition :

Dire que deux évènements A et B sont indépendants signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Vidéo de cours



Astuce!

Dire que deux évènements sont indépendants signifie que lorsque les épreuves sont successives, la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'évènement de l'autre.

Propriété :

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ on a les équivalences :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff p_B(A) = p(A) \iff p_A(B) = p(B)$$

Preuve :

Si $p(A) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.
 de même, si $p(B) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$.
 Or, A et B sont indépendants si, et seulement si,
 $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
 Ainsi : A et B sont indépendants si, et seulement si
 $p(A) \times p(B) = p(A) \times p_A(B) \iff p(B) = p_A(B)$

QCM n° 5



Méthode n° 6 : Déterminer si deux évènements sont indépendants

Niveau *

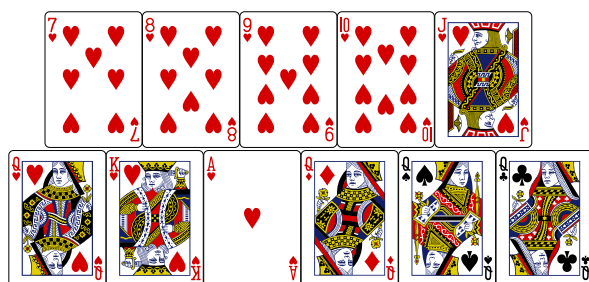
Stratégie :

Il faut vérifier si la propriété est validée, sans forcément chercher à interpréter l'indépendance quand les épreuves ne sont pas successives.

Énoncé :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle :

- C l'évènement « Obtenir un cœur »
- D « Obtenir une dame ».



Déterminer si les évènements C et D sont indépendants.
 Si on rajoute les deux jokers, cela modifie-t-il la réponse?

Correction :

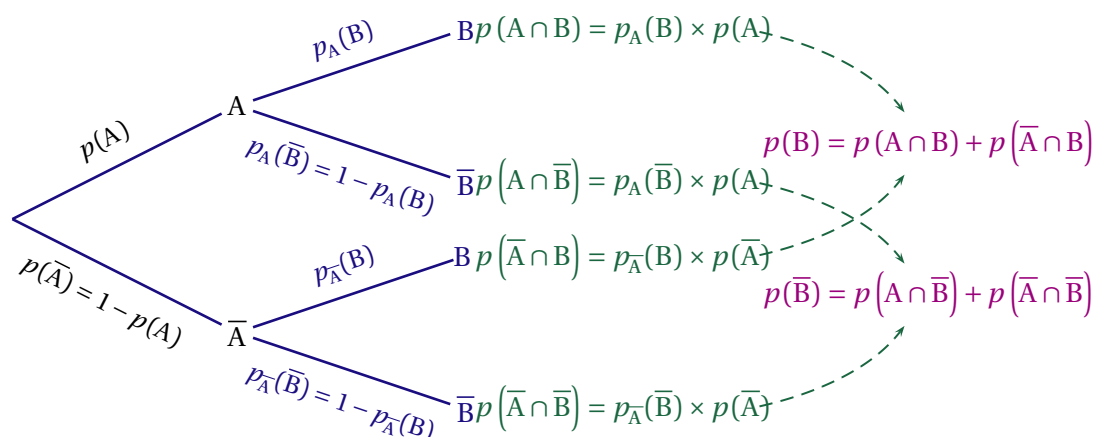


Correction pdf

Synthèse :

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES PROBABILITÉS COMPOSÉES

PROBABILITÉS TOTALES



Vidéo de cours