Le Cours

Arithmétique

5

I. Multiples et diviseurs

Les éléments de bases du cours :

Définition : Niveau *

Soient a et b deux nombres entiers naturels.
On dit que b ***divise*** a lorsqu'il existe un entier naturel q tel que $a = b \times q$.
On dit encore que b est un ***diviseur*** de a ou que a est un ***multiple*** de b.

Vidéo de cours

Exemple : Niveau *

On dit que 3 *divise* 15 car il existe un entier naturel **5** tel que $15 = \mathbf{5} \times 3$.
On dit encore que 3 est un *diviseur* de 15 ou que 15 est un *multiple* de 3.)

Propriété : Niveau *

Pour $b \neq 0$, b est un **diviseur** de a si et seulement si a est un **multiple** de b.

Démonstration fondamentale : Niveau **

La somme de deux multiples d'un même entier relatif a est aussi un multiple de a.

Exemple : Niveau *

20 et 45 sont deux multiples de 5.
Donc $20+45$ est aussi un multiple de 5.
C'est évident en factorisant par 5 :
$20+45 = 5\times4+5\times9 = 5\times(4+9) = 5 \times 13$

Démonstration pour deux multiples de 11 : Niveau **

Soit a et b deux multiples de 11.
D'après la définition de cours, il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que : $a = 11 \times k_1$ et $b = 11 \times k_2$.
On a donc : $a + b = 11k_1 + 11k_2 = 11(k_1 + k_2)$
k_1 et k_2 étant des entiers, $(k_1 + k_2)$ est aussi un entier.
Appelons $q = k_1 + k_2$, on a montré que $a + b = 11 \times q$.
D'après la définition de cours, $a + b$ est donc un multiple de 11.

Cas général. Pour les experts uniquement. Niveau ***

Soit a et b deux multiples d'un entier naturel n.
D'après la définition de cours, il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que :
$a = n \times k_1$ et $b = n \times k_2$.
On a donc : $a + b = nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2)$
k_1 et k_2 étant des entiers, $(k_1 + k_2)$ est aussi un entier.
Appelons $q = k_1 + k_2$, on a montré que $a + b = n \times q$.
D'après la définition de cours, $a + b$ est donc un multiple de n.

QCM n°1

II. Nombres premiers

Définition : Niveau *

Un entier naturel $p \geqslant 2$ est un *nombre premier* lorsque ses seuls diviseurs sont 1 et p.

Remarques : Niveau *

- Le nombre 1 n'est pas considéré comme un nombre premier.
- Les nombres premiers inférieurs à 20 sont :$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$

Vidéo de cours :

0, 1 et 2 sont ils premiers ?

Méthode n°1 : Déterminer si un entier est premier ou non. Niveau *

Stratégie :
Pour savoir si un entier n est premier, on lui cherche des diviseurs entre 2 et $\sqrt{n}$, en appliquant les critères de divisibilité.
Si on n'en trouve pas, il est nécessairement premier.

Énoncé :

Les nombres 87, 109, 143 et 215 sont-ils premiers ?

Correction :

Correction vidéo

III. Décomposition en produit de facteurs premiers

Décomposition en facteurs de nombres premiers : : Niveau *

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire de façon unique comme un produit de facteurs de nombres premiers.

Cette propriété est admise. On ne la démontre pas à notre niveau.

Exemple : niveau *

$1320 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11$
$9900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$

Décomposer 2100 en produit de facteurs premiers.

Correction vidéo

Méthode n°2 : Rendre irréductible une fraction Niveau *

Stratégie :
On utilise la décomposition en produit de facteurs premiers pour le numérateur et le dénominateur.

Énoncé :

Rendre cette fraction irréductible en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers :

$$\frac{68}{170}$$

Correction :

Correction vidéo

QCM n°2

IV. Nombres pairs et impairs

Les éléments de base :

Définition : Niveau *

On appelle *nombre pair*, tout entier multiple de 2 et *nombre impair* tout entier qui n'est pas pair.

Vidéo de cours

Conséquence : Niveau *

- Si p est un nombre pair alors il existe un entier n tel que $p = 2 \times n$
- Si p est un nombre impair alors il existe un entier n tel que $p = 2 \times n + 1$

Propriété : Niveau *

Le carré d'un nombre impair est un nombre impair

Démonstration fondamentale n°2 : Niveau **

Soit k un nombre impair.
On sait d'après la définition qu'il existe un entier n tel que : $k = 2 \times n + 1$
On a alors : $k^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$
Soit $p = 2n^2 + 2n$. p est clairement un entier.
On a montré qu'il existe un entier p tel que : $k^2 = 2p + 1$
Ce qui est la caractéristique d'un nombre impair.

Vidéo

La démonstration

Application pour rédiger une démonstration fondamentale :

Propriété **Niveau ***

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Démonstration fondamentale : **Niveau *****

Procédons à un raisonnement par l'absurde :
Supposons qu'il existe deux entiers m et p tels que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{p}$
On suppose que $\dfrac{m}{p}$ est une fraction irréductible, donc que m et p sont des nombres premiers entre eux.
Conséquence : m et p ne peuvent pas être tous les deux des nombres pairs.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} = \frac{m}{p} \\ \iff \quad & \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{p}\right)^2 \\ \iff \quad & 2 = \frac{m^2}{p^2} \\ \iff \quad & m^2 = 2p^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

On en déduit que m^2 est pair.
Or si m^2 est pair, alors m est un nombre pair.
(*Démonstration admise, facile à prouver, issue de la démonstration fondamentale précédente.*)
Mais si m est un nombre pair, alors il existe un entier k tel que $m = 2k$
Donc : $m^2 = (2k)^2 \iff m^2 = 4k^2$
On a donc d'après (1) :

$$\begin{aligned} m^2 = 2p^2 \quad & \iff \quad 2p^2 = 4k^2 \\ & \iff \quad p^2 = 2k^2 \end{aligned}$$

On en déduit que p^2 est pair.
Or si p^2 est pair, alors p est un nombre pair.
Les deux entiers m et p sont donc tous les deux pairs.
Donc la fraction $\dfrac{m}{p}$ ne peut pas être irréductible comme cela a été supposé.
C'est une contradiction.
Il est impossible d'écrire $\sqrt{2} = \dfrac{m}{p}$ sous la forme d' une fraction irréductible.
L'hypothèse de départ est fausse.
$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. C'est donc un irrationnel.

Vidéo : Niveau ***

La démonstration

QCM n°3