

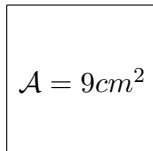
Racines Carrées

(Manipuler les nombres réels)

I. Introduction

1ère situation

On considère ce carré d'aire 9 cm^2



$$A = 9 \text{ cm}^2$$

On cherche à déterminer la mesure c de son côté.

On doit résoudre : $c^2 = 9$

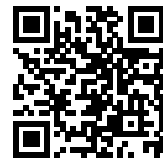
Comme c est une longueur, $c > 0$.

La solution est donc le nombre positif dont le carré vaut 9.

Intuitivement, on trouve 3, qui est le seul nombre positif vérifiant $c^2 = 9$ et $c > 0$

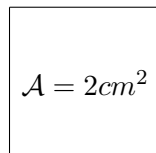
$$\iff c = 3$$

Le cours en vidéo



2ème situation

On considère ce carré d'aire 2 cm^2



$$A = 2 \text{ cm}^2$$

On cherche à déterminer la mesure c de son côté.

On doit résoudre : $c^2 = 2$

Comme c est une longueur, $c > 0$.

La solution est donc le nombre positif dont le carré vaut 2.

On ne peut trouver intuitivement la solution de $c^2 = 2$

On a :

$$\begin{aligned} 1 &< c^2 < 4 \\ 1^2 &< c^2 < 2^2 \\ 1 &< c < 2 \end{aligned}$$

Mais intuitivement, on ne trouve pas facilement de solution.

A la calculatrice, avec un algorithme, on pourrait affiner la valeur de c .

On démontre que le nombre positif c vérifiant $c^2 = 2$ est un irrationnel.

Pour l'écrire, la notation décimale et fractionnaire ne convient pas.

Il faut inventer une notation pour écrire ce nombre : $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ est donc le nombre positif dont le carré vaut 2.

QCM n°1



II. Définition

Définition

Niveau *

La racine carrée d'un réel positif x est le nombre positif noté $\sqrt{x}$ dont le carré est égal à x .

Si x est un réel positif alors $\sqrt{x}^2 = x$

Le cours en vidéo



Propriété

Niveau *

Pour tout réel positif x , $\sqrt{x^2} = x$ et $\sqrt{x} \geq 0$

Remarques

- D'après la définition, on ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif.
- Les nombres dont la racine carrée est un entier sont les **carrés parfaits**. Il est utile de connaître les premiers :

$$2^2 = 4 \quad \text{donc} \quad \sqrt{4} = 2$$

$$3^2 = 9 \quad \text{donc} \quad \sqrt{9} = 3$$

$$4^2 = 16 \quad \text{donc} \quad \sqrt{16} = 4$$

$$5^2 = 25 \quad \text{donc} \quad \sqrt{25} = 5$$

$$6^2 = 36 \quad \text{donc} \quad \sqrt{36} = 6$$

$$7^2 = 49 \quad \text{donc} \quad \sqrt{49} = 7$$

$$8^2 = 64 \quad \text{donc} \quad \sqrt{64} = 8$$

$$9^2 = 81 \quad \text{donc} \quad \sqrt{81} = 9$$

$$10^2 = 100 \quad \text{donc} \quad \sqrt{100} = 10$$

$$11^2 = 121 \quad \text{donc} \quad \sqrt{121} = 11$$

$$12^2 = 144 \quad \text{donc} \quad \sqrt{144} = 12$$

$$13^2 = 169 \quad \text{donc} \quad \sqrt{169} = 13$$

$$14^2 = 196 \quad \text{donc} \quad \sqrt{196} = 14$$

$$15^2 = 225 \quad \text{donc} \quad \sqrt{225} = 15$$

$$16^2 = 256 \quad \text{donc} \quad \sqrt{256} = 16$$

- En général on ne peut écrire que des valeurs approchées des racines carrées sous forme décimale. Ainsi : $\sqrt{2} \approx 1,414$ et $\sqrt{3} \approx 1,732$

QCM n°2



III. Propriétés calculatoires des produits et quotients de racines carrées :

Racine carrée et produits :

Niveau *

Soit $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Le cours en vidéo



Démonstration fondamentale :

Niveau **

On a d'après la propriété de cours : $\sqrt{a \times b} \geq 0$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \geq 0$

On va utiliser la propriété suivante, (démontrée dans le cours sur la fonction carré)

Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a^2 = b^2 \iff a = b$ (P_2)

Si on prouve que $\sqrt{a \times b}^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$ on aura montré $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Or, d'après la définition d'une racine carrée, $\sqrt{a \times b}^2 = a \times b$

D'autre part, $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 = a \times b$

On vient donc de montrer que $\sqrt{a \times b}^2 = a \times b = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$

Avec la propriété (P_2), on en déduit que : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Racine carrée et quotients :**Niveau ***Soit $a \geq 0$ et $b > 0$, on a :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration :

Identique à celle du produit.

Méthode n°1 : Utiliser les propriétés des racines carrées

*

Stratégie :

Appliquer les relations de cours

Énoncé :

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \sqrt{12} \times \sqrt{3}$$

$$B = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$$

Correction :**QCM n°3****IV. Propriétés calculatoires de sommes de racines carrées****Racine carrée et sommes :****Niveau ***Soit $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a :

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Le cours en vidéo

Démonstration Fondamentale :**Niveau ****

L'idée est d'utiliser encore la propriété (P_2) :

Soit $a \geq 0$ et $b \geq 0$,

on a d'après la définition de la racine carrée :

$$(\sqrt{a+b})^2 = a+b$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a})^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \\ &= a + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + b \end{aligned}$$

Comme

$$2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \geq 0$$

on a aussi :

$$a + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + b \geq a + b$$

on a montré que :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2$$

Or, d'après la propriété (P_2) :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2 \iff \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$$

Démo en vidéo**Exemple :****Niveau ***

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \end{array} \right\} \text{On en déduit : } \sqrt{9+16} \leq \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

QCM n°4**V. Mettre une racine carrée sous la forme $a\sqrt{b}$** **Réduction d'une racine carrée :****Niveau ***

Méthode :

Pour réduire une racine carrée :

Il faut **déterminer le plus grand carré parfait diviseur du nombre placé sous le symbole radical** puis utiliser la propriété des produits.

Cours en vidéo

Méthode n°2 : Réduire une racine carrée :

Niveau *

Stratégie :

Il faut trouver le plus grand carré parfait diviseur du nombre sous le radical.

Énoncé :Réduire $\sqrt{72}$ **Correction :****Méthode n°3 : Simplifier des sommes de racines carrées** Niveau ***Stratégie :**

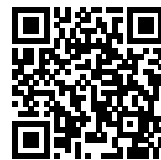
Utiliser les propriétés des sommes et de réduction d'une racine

Énoncé :

Simplifier l'écriture de :

$$A = \sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 4$$

$$B = \sqrt{7} + 3\sqrt{28} - 4\sqrt{343}$$

Correction :

Le cours en vidéo

QCM n°5**VI. Rendre un dénominateur entier****Explication :**

Niveau ***

Les nombres irrationnels n'ayant ni écriture décimale, ni fractionnaire, par commodité de calcul pour la division, on essaie de donner toujours un résultat en écriture fractionnaire avec un **dénominateur entier**

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ est acceptable puisque 3 est un entier.

$\frac{3}{\sqrt{2}}$ ne l'est pas puisque le $\sqrt{2}$ n'est pas un entier.

Méthode n°4 : Rendre un dénominateur entier

Niveau **

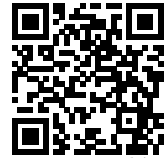
Stratégie :

Si on a une seule racine carrée au dénominateur, l'astuce consiste à multiplier numérateur et dénominateur par ce nombre, pour faire apparaître un carré au dénominateur.

Énoncé :

Rendre entier le dénominateur de :

$$\frac{3}{\sqrt{3}}$$

Correction :

Vidéo



pdf

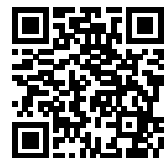
Méthode n°5 : Rendre un dénominateur entier avec la quantité conjuguée Niveau *****Stratégie :**

Quand on a une somme au dénominateur, l'astuce consiste à utiliser l'identité remarquable

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Énoncé :

Rendre entier le dénominateur de : $\frac{3}{1 + \sqrt{3}}$

Correction :

vidéo



pdf

Quantité conjuguée

Niveau ***

On dit que $1 - \sqrt{3}$ est la *quantité conjuguée* de $1 + \sqrt{3}$

QCM n°6