Cours & méthodes

Nombre dérivé - Tangente

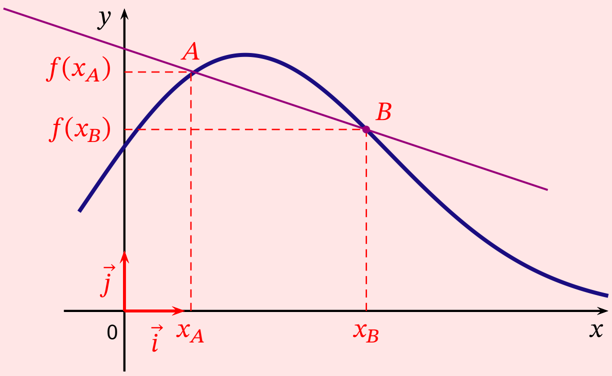
5 ANALYSE

1 Taux de variation

1.1 Définition :

Propriété : Pente d'une droite :

Soit f une fonction définie sur I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On nomme $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points de $\mathcal{C}_f$



On sait que le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par la relation :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Ce coefficient mesure la pente de la droite (AB).

Vidéo de cours

Traduction en langage de fonction :
Comme $y_B = f(x_B)$ et $y_A = f(x_A)$, en posant : $x_A = a$ et $x_B = b$, il vient :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On note ce coefficient, **taux de variation** de f entre a et b. On le note : $\tau = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ τ se lit "tau"

S'évaluer :

Propriété : taux de variation

Le taux de variation de f entre a et b est le coefficient directeur de la droite (AB).
Si $a \neq b$:

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

QCM 1

Méthode : Calculer un taux de variation entre deux antécédents :

On note f la fonction définie $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 6x + 7$.
Calculer le taux de variation de f entre 3 et -2.

1.2 Taux d'accroissement

Définition : Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I. Soit h un réel non nul tel que $a+h \in I$.
Le **taux d'accroissement** (ou taux de variation) de f entre a et $a+h$ est le rapport $t(h)$ défini par :

$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

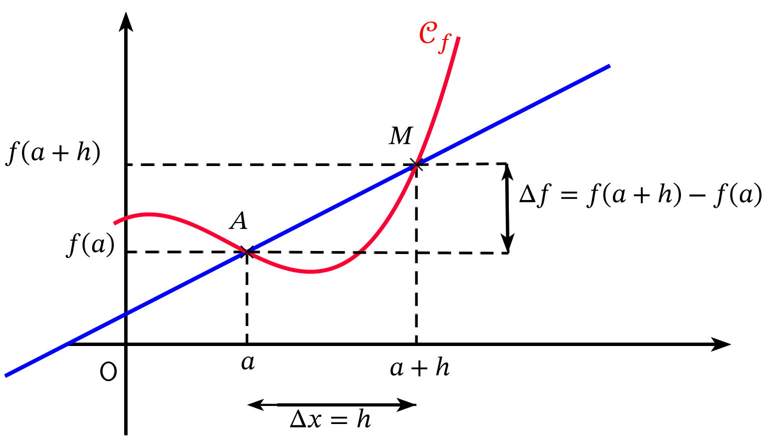
Remarque

Il suffit de poser $b = a+h$ dans la relation précédente du taux de variation, pour obtenir ce résultat équivalent.
L'intérêt est de faire apparaître la distance entre les deux antécédents a et b, notée h.
Il suffit donc d'un seul antécédent pour calculer ce taux, qui sera donné en fonction d'une distance h.

Interprétation graphique :

A et M sont des points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a+h$. Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la droite (AM) :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Méthode : Calculer un taux d'accroissement :

On note f la fonction définie $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4$.
Calculer le taux de d'accroissement de f en -1

---

2 Nombre dérivé

Définition : Nombre dérivé

On dit que f est **dérivable** en a lorsque le taux d'accroissement $t(h)$ admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0. Ce nombre, noté $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé de** f en a.
On a ainsi :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Vidéo de cours

Remarque : Méthode pour calculer un nombre dérivé :

Pour déterminer le nombre dérivé en 3 par exemple, on calculera le quotient $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$.
On essayera de simplifier et réduire l'expression.
Pour conclure, on observera l'évolution de cette quantité quand h devient très proche de 0, ce qui donnera la limite "quand h tend vers zéro".

Méthode : Calculer un nombre dérivé (1)

Soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
Calculer $f'(2)$

Méthode : Calculer un nombre dérivé (2)

Soit $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Calculer $g'(-1)$

Méthode : Calculer un nombre dérivé (3)

Soit $h : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
Calculer $h'(3)$

Méthode : Démonstration fondamentale : Niveau **

Démontrer que la fonction racine carrée n'admet pas de nombre dérivé en zéro.

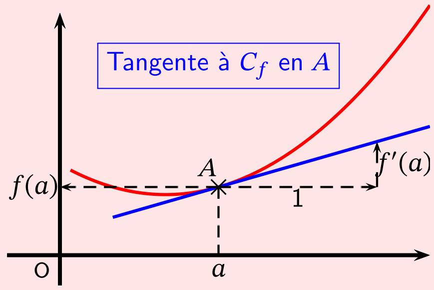
S'évaluer :

QCM 2

3 Tangente

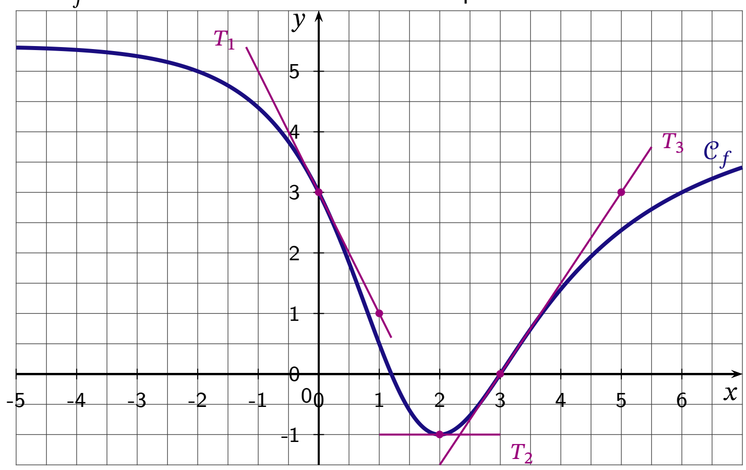
Définition : Tangente en un point

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est la droite passant par le point A dont le coefficient directeur est $f'(a)$.



Méthode : Déterminer graphiquement le nombre dérivé et l'équation de la tangente

La courbe $\mathcal{C}_f$ tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

S'évaluer :

QCM 3

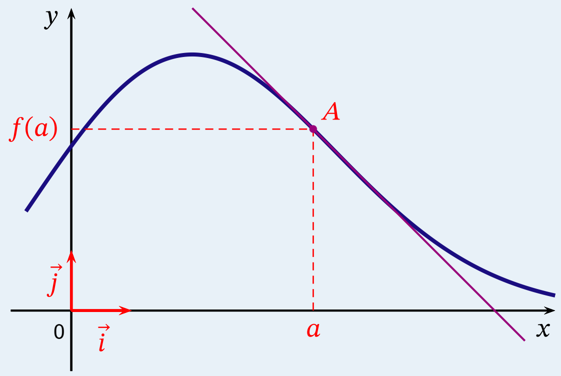
Propriété : Équation d'une tangente

Soit f une fonction définie et dérivable en a et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Alors $\mathcal{C}$ admet en son point d'abscisse a une tangente T d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration : Déterminer une équation de tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
La droite (T) passant par le point $A\,(a; f(a))$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a



On cherche à connaître l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en a.
On sait que l'équation est de la forme $(T) : y = mx + p$ avec : $m = f'(a)$. Soit $M(x; y)$ un point de la tangente (T) et $A\,(a; f(a))$ le point de la courbe d'abscisse a qui appartient aussi à la tangente (T).
On sait que $m = \dfrac{Y_M - Y_A}{X_M - X_A} = \dfrac{y - f(a)}{x - a}$
On a alors :

$$m = \frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Il vient avec un produit en croix que :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Ce n'est ni une équation réduite ni cartésienne de la tangente mais cette forme est assez pratique, donc on conserve cette forme pour l'équation de (T) est $(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Méthode : Déterminer une équation de la tangente

Soit f une fonction dérivable sur $[-5; 5]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On sait que $f(3) = -5$ et que $f'(3) = 2$.
Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3, en utilisant la formule de cours de l'équation de tangente.

S'évaluer :

QCM 4