

Polynômes de degré 2

4

I. Différentes formes d'un polynôme du second degré :

1. Forme développée

Définition :

Niveau *

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, avec a, b, c sont des réels et $a \neq 0$, par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 Cette fonction est aussi appelée **fonction trinôme du second degré**.

Vidéo de cours



QCM n°1



2. Forme canonique :

Définition :

Niveau *

Une fonction polynôme f de degré 2, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous forme canonique sous la forme

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Vidéo de cours



QCM n°2



Propriétés :

Niveau *

On montre que :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Méthode n°1 : Mettre un polynôme sous forme canonique

Niveau *

Stratégie :

Revenir à la méthode vue au chapitre 1 ou appliquer les formules rappelées qui donnent α et β

Énoncé :

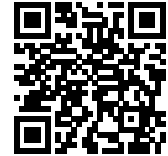
Déterminer la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$
 par $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$.

Correction :

Correction pdf



Correction vidéo



3. Forme factorisée :

Définition :

Une fonction f définie par

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec $a \neq 0$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$,
est une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$.

Vidéo de cours



QCM n°3



Vocabulaire

x_1 et x_2 sont les **racines** du polynôme, c'est-à-dire les **solutions** de l'équation : $f(x) = 0$

Attention :

Toute fonction f définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ peut se développer sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Mais certains polynômes de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ne peuvent pas se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

De même que certaines équations du second degré n'ont pas de solutions, quand $\Delta < 0$.

Méthode n°2 : Factoriser un polynôme

Niveau *

Stratégie :

On cherche les racines du polynôme comme on chercherait les solutions d'une équation.

Énoncé :

Factoriser, si cela est possible, le polynôme de degré 2 f , défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^2 - 3x + 1$$

Correction :



Méthode n°3 : Factoriser un polynôme

Niveau *

Stratégie :

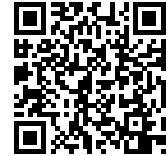
On cherche les racines du polynômes comme on chercherait les solutions d'une équation.

Énoncé :

Factoriser, si cela est possible, le polynôme de degré 2 f , défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 3x + 1$$

.

Correction :**S'entraîner seul :**

Soit f le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$.
Déterminer la forme factorisée de f si elle existe.

**Exercices sur Mathalea :****QCM n°4****II. Variations d'un polynôme du second degré :****1. A partir de la forme canonique :****Méthode n°4 : Démontrer les variations à partir de la forme canonique**

Niveau *

Stratégie :

Revenir à la définition d'une fonction croissante ou décroissante et utiliser les variations de la fonction carré.

Énoncé :

Démontrer que la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -3(x + 1)^2 - 4$$

est croissante sur $] -\infty; -1[$
et croissante sur $[1; +\infty[$

Correction :

Propriété :

La forme canonique d'une fonction polynôme du second degré permet de déduire son maximum ou son minimum, qui vaut β , atteint en α .



Démo en pdf



Vidéo de cours

Propriété fondamentale :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$$a < 0$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		β	

$$a > 0$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$		β	

Méthode n°5 : Déterminer le tableau de variation

Niveau *

Stratégie :

On utilise le résultat de cours précédent.

Énoncé :

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$.

Correction :



Correction vidéo



Correction pdf

2. Tableau de variations avec la forme développée :

Méthode :

Niveau *

Quand on cherche les variations d'un polynôme f du second degré sous forme développée, le plus simple est de le mettre sous forme canonique pour appliquer le cours précédent.

On sait que f peut s'exprimer sous forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Propriété fondamentale :

Niveau *

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	

Diagramme illustrant la variation de $f(x)$ pour $a < 0$. La fonction est représentée par une parabole ouverte vers le bas, avec des flèches indiquant qu'elle décroît de $-\infty$ à $+\infty$.

$$a > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	

Diagramme illustrant la variation de $f(x)$ pour $a > 0$. La fonction est représentée par une parabole ouverte vers le haut, avec des flèches indiquant qu'elle croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Méthode n°6 : Variations d'un polynôme sous forme développée :

Niveau *

Stratégie :

Il faut passer par la forme canonique.

Énoncé :

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

Correction :



Correction



Correction pdf

QCM n°5



III. Courbe représentative

1. Vocabulaire :

Définition :

Niveau *

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une **parabole**.

On dit que la parabole a pour équation $y = ax^2 + bx + c$.

Vidéo de cours :



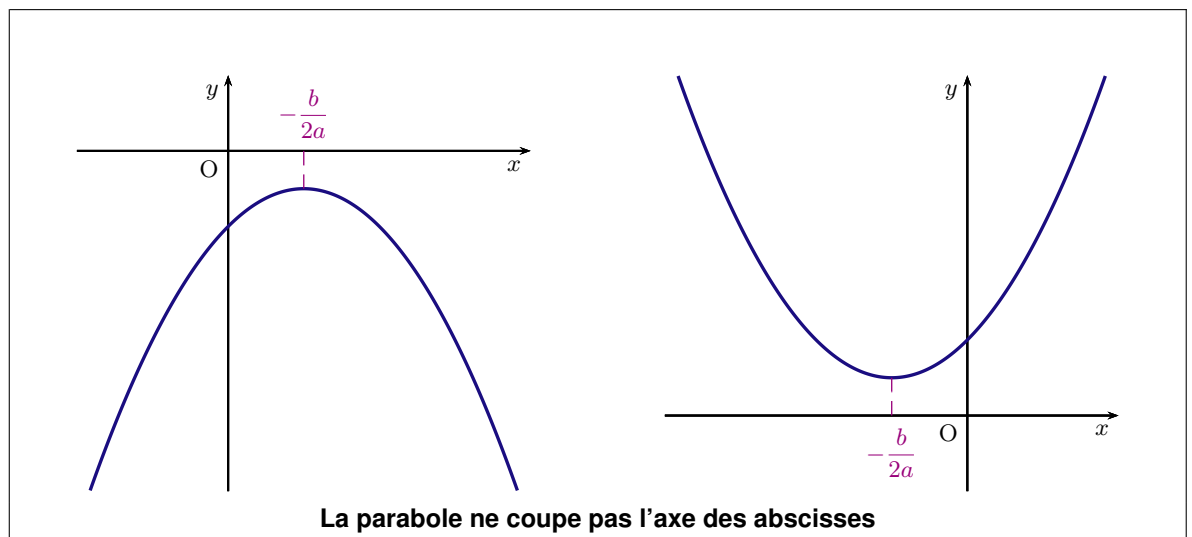
Vidéo de cours

2. Interprétation graphique :

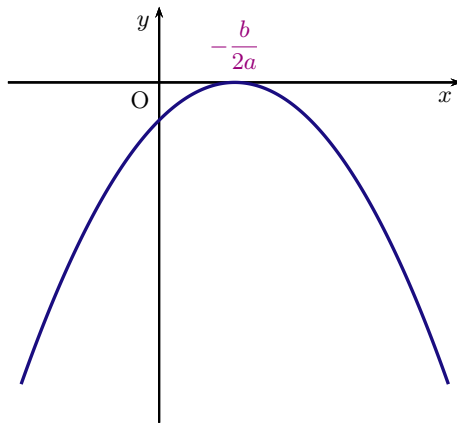
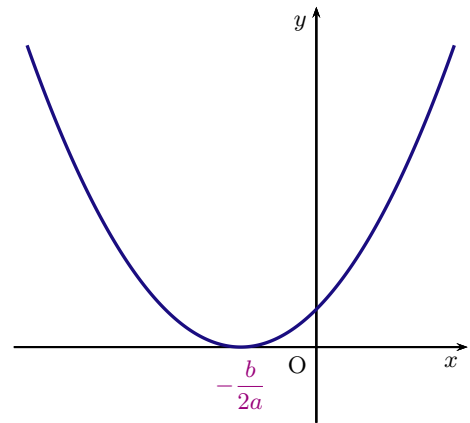
Lien entre courbe et Δ :

Niveau *

On sait que le signe de Δ détermine le nombre de racine du polynôme.
Or, les racines du polynômes sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec les abscisses.
Le signe de Δ permet donc de déterminer le nombre de points d'intersection de la parabole avec les abscisses.

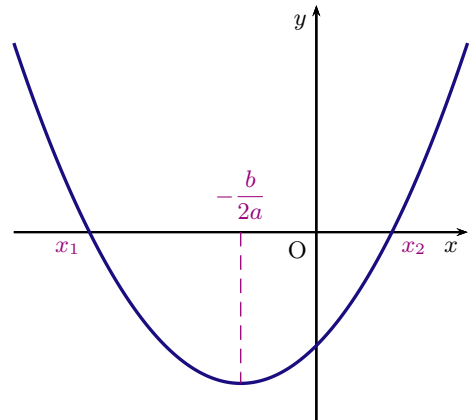
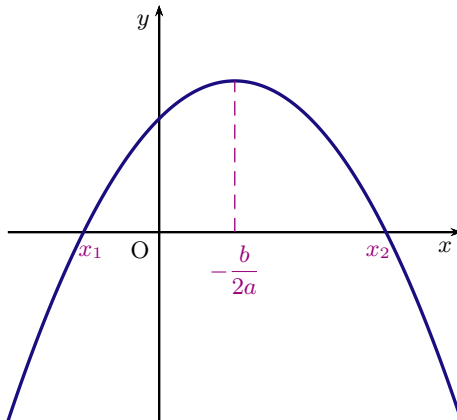
cas $a < 0$ cas $a > 0$ $\Delta < 0$ 

$$\Delta = 0$$

cas $a < 0$ cas $a > 0$ 

La parabole est tangente à l'axe des abscisses

$$\Delta > 0$$



La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points

QCM n°6



3. Ordonnée à l'origine

Propriété graphique : niveau *

Soit P un polynôme du second degré, sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Comme $f(0) = c$, la parabole passe par le point de coordonnées $(0; c)$.

Méthode n°7 : Analyse graphique d'une parabole

Niveau *

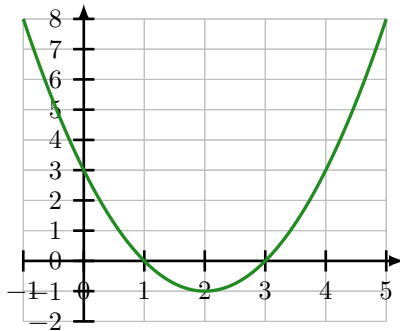
Stratégie :

Bien comprendre les propriétés de chaque paramètre

Énoncé :

A partir de la représentation graphique d'un polynôme f de degré 2, donnez :

1. Le signe de a et de Δ .
2. La valeur de c , de α et de β .



Correction :

4. Maximum ; minimum et symétrie.

Propriété :

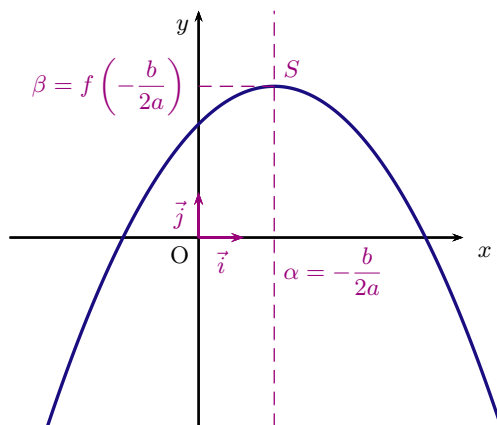
Niveau *

Le sommet S de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha; \beta)$

Il correspond au maximum ou au minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f , selon le signe de a .

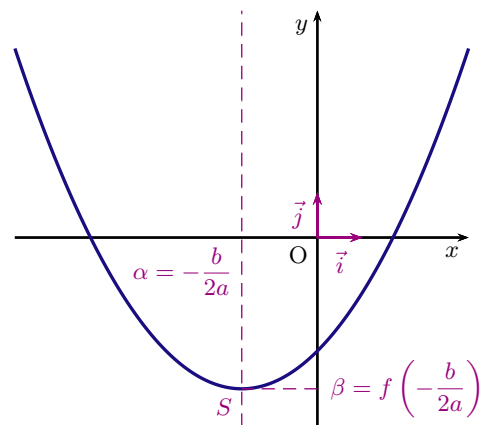
La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$

$$a < 0$$



La parabole est tournée vers le bas

$$a > 0$$



La parabole est tournée vers le haut

Méthode n°8 : Utiliser la symétrie pour démontrer

Niveau **

Stratégie :

Deux points de même ordonnées de la parabole, ont des abscisses symétriques par rapport à α .

Énoncé :

Soit f un polynôme du second degré.
Sachant que $f(2) = f(6) = 4$, déterminer α .

Correction :**Méthode n°9 : Étudier la position relative de deux courbes.**

Niveau **

Stratégie :

Pour déterminer quand une courbe $\mathcal{C}_f$ est "au dessus" de d'une courbe $\mathcal{C}_g$, il suffit de savoir quand $f(x) > g(x)$. Pour étudier cela, il est plus facile d'étudier $f(x) - g(x) > 0$

Énoncé :

Étudier les positions relatives de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 3$

Correction :

Correction pdf

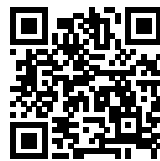


Vidéo

QCM n°7



Vidéo de cours



Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$		$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$								
$a > 0$	Variations	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3"></td></tr></table>			x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$			
	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$								
	$f(x)$											
	Courbe											
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$									
Signe de $ax^2 + bx + c$	Strictement positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $] -\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ Négatif sur $[x_1; x_2]$									
$a < 0$	Variations	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3"></td></tr></table>			x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$f(x)$			
	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$								
	$f(x)$											
	Courbe											
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$									
Signe de $ax^2 + bx + c$	Strictement négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $] -\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ Positif sur $[x_1; x_2]$									