

Polynômes du second degré

4
ALGÈBRE

Ce parcours d'exercices appartient à :

Parcours 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

Parcours 2

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

1 Exploiter les paraboles

Exercice 1

On a représenté les courbes de cinq fonctions :

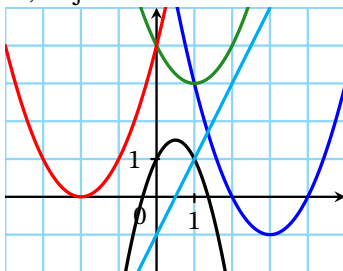
f, g, h, k, m .

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \quad ; \quad g(x) = -2x^2 + 2x + 1$$

$$h(x) = 2x - 1 \quad ; \quad k(x) = (x - 1)^2 + 3$$

$$m(x) = x^2 + 4x + 4$$

Associer à chaque courbe, la fonction qui lui correspond, en justifiant :



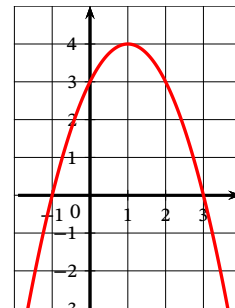
Correction
vidéo

Jaicompris.com

Exercice 2

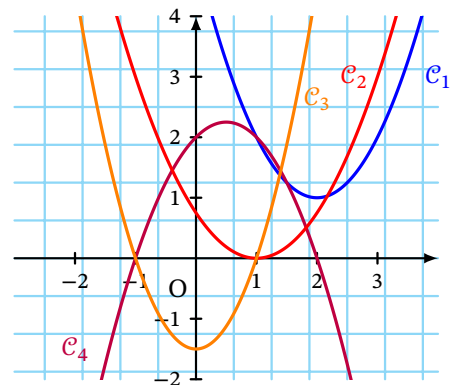
On donne la représentation graphique d'une fonction f polynôme du second degré.

- 1) Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole? Donner une équation de l'axe de symétrie.
- 2) Donner les racines de f .
- 3) Donner la valeur de $f(0)$.
- 4) Dresser les tableaux de signes et de variations de $f(x)$.
- 5) Déterminer l'expression algébrique de $f(x)$ sous forme factorisée, puis sous forme développée.



Exercice 3

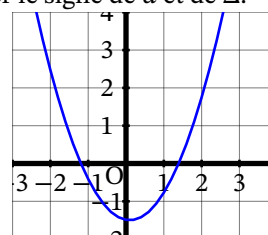
Pour chaque fonction représentée, déterminer sa forme factorisée (si elle existe).



Exercice 4

La courbe représente une fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

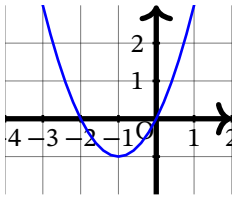
Donner le signe de a et de Δ .



MathALÉA

Exercice 5

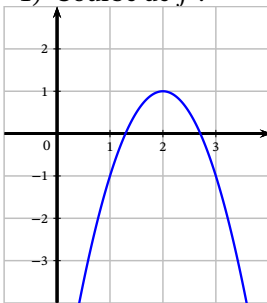
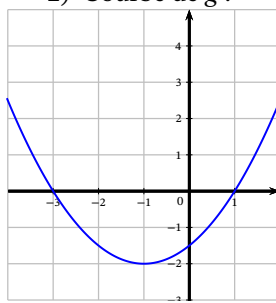
La courbe représente une fonction f définie par $f(x) = x^2 + bx + c$.
Déterminer les valeurs de b et c .



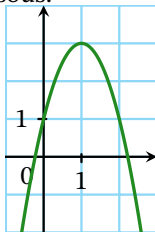
MathALÉA

Exercice 6

Pour chaque fonction représentée ci-dessous, déterminer les coordonnées du sommet, l'axe de symétrie et le signe de a .

1) Courbe de f :2) Courbe de g :**Exercice 7**

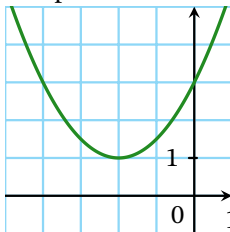
Obtenir la forme canonique correspondant à la parabole ci-dessous.

Correction
vidéo

Jaicompris.com

Exercice 8

Déterminer la fonction f du second degré, correspondant à la parabole ci-dessous.

Correction
vidéo

Jaicompris.com

2 Variations et extremums

Exercice 9

Dire pour chaque fonction si elle admet un minimum ou un maximum et en quelle valeur il est atteint.

- 1) $f(x) = 3x^2 + 4$ 3) $h(x) = -2x^2 + 8x - 1$
2) $g(x) = -2(x - 4)^2 + 8$ 4) $k(x) = 7(x + 1)^2 - 25$

Exercice 10 : Variations avec la forme développée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^2 + 9x - 5.$$

- 1) f admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?
- 2) Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 11 : Variations avec la forme développée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$.

- 1) Dresser le tableau de variations de f .
- 2) En déduire le(s) extremum(s) de f .

Exercice 12 : Variations avec la forme canonique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -2(x + 3)^2 - 4$$

- 1) Dresser le tableau de variations de f .
- 2) En déduire le(s) extremum(s) de f .

Exercice 13 : Variations avec la forme factorisée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3(x - 2)(x + 3)$$

- 1) Dresser le tableau de variations de f .
- 2) En déduire le(s) extremum(s) de f .

Exercice 14

Déterminer le tableau de variations des fonctions polynômes du second degré suivantes :

- a. $f : x \mapsto 4(x - 3)^2 + 5$
b. $x \mapsto 2 - (x + 1)^2$
c. $h : x \mapsto 1 - 4x^2$

Correction
vidéo

Jaicompris.com

Exercice 15

On considère la parabole d'équation $y = 2x^2 - 16x + 1$.

- 1) Quel est l'axe de symétrie de la parabole ?
- 2) Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse 0.
- 3) En déduire l'ordonnée du point d'abscisse 8 sans calcul.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -9(x + 5)^2 + 1.$$

Donner une équation de l'axe de symétrie de la parabole représentant f .



3 S'entraîner/Chercher

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^2 + 36x - 33. \quad (\text{Forme développée})$$

- Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :

$$f(x) = -3(x - 11)(x - 1). \quad (\text{Forme factorisée})$$
- Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :

$$f(x) = -3(x - 6)^2 + 75. \quad (\text{Forme canonique})$$
- Répondre aux questions suivantes en utilisant l'écriture de $f(x)$ la mieux adaptée :
 - Résoudre l'équation $f(x) = 75$.
 - Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
 - Résoudre l'équation $f(x) = -33$.
 - Calculer $f(0)$, $f(1)$ puis $f(6)$.



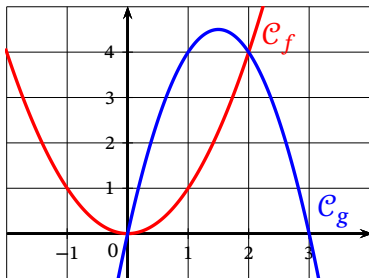
MathALÉA

Exercice 18

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = 6x - 2x^2$$

- Conjecturer graphiquement l'ensemble des réels x pour lesquels $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.
- Résoudre le problème par le calcul.



MathGM

Exercice 19

Un artisan fabrique des confitures qu'il vend par carton de dix pots.

Le coût en € de fabrication de x cartons de dix pots est $f(x) = 0,25x^2 + 500$, pour x compris 0 et 160.

- Déterminer le coût de fabrication de 60 cartons de dix pots de confiture.
 - Pour combien de cartons le coût de fabrication est de 2525 €?
- Chaque carton de confitures est vendu 30 €. Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x .
- Soit B la fonction bénéfice définie sur $[0; 160]$.
 - Montrer que, pour tout $x \in [0; 160]$:

$$B(x) = -0,25x^2 + 30x - 500$$
 - Montrer que, pour tout $x \in [0; 160]$:

$$B(x) = -0,25(x - 100)(x - 20)$$
- Dresser les tableaux de signes et de variations de la fonction B .

BAC

- Quel nombre de cartons doit vendre cet artisan si il veut réaliser un bénéfice positif?
- Quel est le nombre de cartons à vendre pour que son bénéfice soit maximal? Calculer alors ce bénéfice.

Exercice 20

Un joueur de tennis frappe dans une balle avant qu'elle touche le sol.

La trajectoire de la balle est alors définie par la parabole d'équation $y = -0,03x^2 + 0,3x + 0,75$, où x correspond à la distance entre le joueur de tennis et la balle et y correspond à la hauteur de la balle.

- Le filet se trouve à 5 m du joueur et la hauteur du filet est de 1 m.
 La balle passe-t-elle au-dessus du filet? Justifier.
- Déterminer à quelle distance du joueur la balle est retombée par terre.
 On donnera une valeur arrondie au centième.
- À quelle(s) distance(s) du joueur la balle a-t-elle une hauteur supérieure ou égale à 1,02 m?

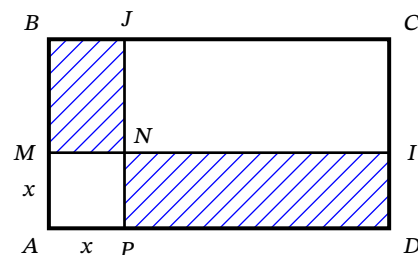
Magnard

Exercice 21

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 10$. M étant un point du segment $[AB]$, on construit le carré $AMNP$ et le rectangle $NICJ$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.

On pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire de la partie hachurée.

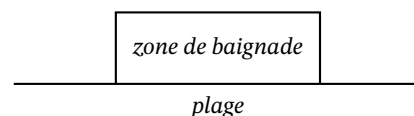
Donner l'ensemble de définition de la fonction f .



Pour quelle valeurs de x , l'aire de la partie hachurée est supérieure à 28?

Exercice 22

Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale?



(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

$$f(x) = -2(x-1)^2 + 3$$

Corrigé de l'exercice 2

1) $S(1; 4)$, $x = 1$

2) Racines : -1 et 3 .

3) $f(0) = 3$.

4) Tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		4	

5) $f(x) = -(x+1)(x-3)$ pour la forme factorisée et
 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ pour la forme développée.

Corrigé de l'exercice 3

f_1 n'a pas de forme factorisée.

$$f_2(x) = 0,75(x-1)^2$$

$$f_3(x) = 1,5(x-1)(x+1)$$

$$f_4(x) = -(x-2)(x+1)$$

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 5

Par lecture graphique, la fonction f a deux racines 0 et -2 .

Puisque le coefficient devant x^2 est 1 , la forme factorisée de $f(x)$ est $(x+0)(x+2)$.

Le développement de cette expression donne $x^2 + 2x + 0$.

Ainsi, $b = 2$ et $c = 0$.

Autre méthode :

L'abscisse du sommet de la parabole est -1 (on l'obtient par la moyenne des racines de f).

Comme l'abscisse du sommet est aussi donné par $-\frac{b}{2a}$, alors
 $-\frac{b}{2a} = -1$.

L'énoncé indique que $a = 1$, on en déduit $-\frac{b}{2} = -1$, soit
 $b = 2$.

La valeur de c est donnée par l'image de 0 par f soit ici 0 .

Corrigé de l'exercice 6

Pour $f : S(2; 1)$, $x = 2$ et $a < 0$.

Pour $g : S(-1; -2)$, $x = -1$ et $a > 0$.

Corrigé de l'exercice 7

$$f(x) = -2(x-1)^2 + 3$$

Corrigé de l'exercice 8

$$f(x) = 0,5(x+2)^2 + 1$$

Corrigé de l'exercice 9

1) Minimum : 4 , atteint en $x = 0$.

2) Maximum : 8 , atteint en $x = 4$.

3) Maximum : 7 , atteint en $x = 2$.

4) Minimum : -25 , atteint en $x = -1$.

Corrigé de l'exercice 10

1) f admet un maximum car ...

2) Tableau de variations de f (à justifier) :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		$\frac{7}{4}$	

Corrigé de l'exercice 11

1) Tableau de variations de f (à justifier) :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$		-10	

2) f admet un minimum qui vaut ...

Corrigé de l'exercice 12

1) Tableau de variations de f :

On reconnaît la forme canonique d'un polynôme de degré 2 .

On lit $a = -2 < 0$ dont la parabole est tournée vers le bas.

On lit $\alpha = -3$ et $B = -4$ donc la fonction admet un maximum en -3 qui vaut -4 .

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$		-4	

2) f admet un maximum qui vaut -4

Corrigé de l'exercice 13

1) Tableau de variations de f :

On reconnaît la forme factorisée d'un polynôme de degré 2 .

On peut développer pour appliquer le cours sur la forme développée.

On utilise que $a = 3 > 0$ dont la parabole est tournée vers le haut.

On lit $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$ donc l'abscisse du sommet est au milieu de ces deux abscisses :

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2}$$

On calcule $\beta = f(\alpha) = f(-\frac{1}{2}) = -18.75$

la fonction admet un maximum en -3 qui vaut -4 .

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		-18.75	

2) f admet un minimum qui vaut -18.75

Corrigé de l'exercice 14

1) Tableau de variations de f :

On reconnaît la forme factorisée d'un polynôme de degré 2.

On peut développer pour appliquer le cours sur la forme développée.

On utilise que $a = 3 > 0$ dont la parabole est tournée vers le haut.

On lit $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$ donc l'abscisse du sommet est au milieu de ces deux abscisses :

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2}$$

On calcule $\beta = f(\alpha) = f(-\frac{1}{2}) = -18.75$

la fonction admet un maximum en -3 qui vaut -4 .

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		-18.75	

2) f admet un minimum qui vaut -18.75

Corrigé de l'exercice 15

1) $x = 4$

2) 1

3) Utilisez la symétrie de la courbe.

Corrigé de l'exercice 16

f est une fonction polynôme du second degré écrite sous forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

L'axe de symétrie a pour équation $x = \alpha$.

On obtient alors $x = -5$.

Corrigé de l'exercice 17

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 18

1) Sur $]0; 2[$.

2) Il faut résoudre l'inéquation $6x - 2x^2 > x^2$.

Corrigé de l'exercice 19

1) a) 1400 €.

b) 90 cartons.

2) $R(x) = 30x$

3) a) $B(x) = R(x) - f(x) = -0,25x^2 + 30x - 500$ (attention n'oubliez pas les parenthèses autour de $f(x)$).

b) Développez $-0,25(x - 100)(x - 20)$.

4) Tableau de signes :

x	0	20	100	160	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Tableau de variations :

x	0	60	160
$f(x)$	-500	400	-2100

5) Quel nombre de cartons doit vendre cet artisan si il veut réaliser un bénéfice positif?

6) Quel est le nombre de cartons à vendre pour que son bénéfice soit maximal? Calculer alors ce bénéfice.

Corrigé de l'exercice 20

1) Oui. Calculez y pour $x = 5$.

2) Résolvez l'équation $y = 0$. On trouve 12,07 m.

3) Résolvez l'inéquation $y \geq 1,02$. La balle a une hauteur supérieure ou égale à 1,02 m entre 1 m et 9 m du joueur.

Corrigé de l'exercice 21

Pour x compris entre 3,5 et 4.

Corrigé de l'exercice 22

Largeur : 12,5 m et longueur : 25 m.