Le Cours

# 3. Les ensembles de nombres :

## (Manipuler les nombres réels)

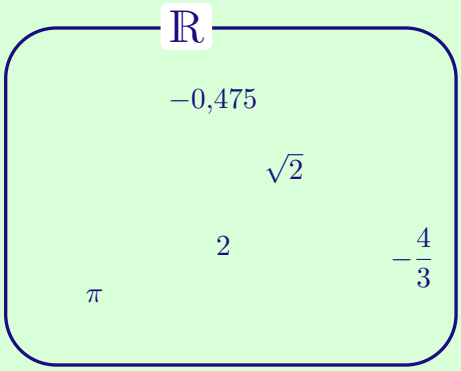
Thème
Nombres et calculs.

## I. L'ensemble $\mathbb{R}$

**Définition :** Niveau *

On appelle $\mathbb{R}$, l'ensemble de tous les nombres réels, c'est-à-dire ceux que l'on peut représenter sur une droite graduée.


**Illustration :** Niveau *




**Vidéo de cours :**

**Notations :** Niveau *

- On utilise le symbole $\in$ pour dire qu'un élément appartient à un ensemble.
- On note $3 \in \mathbb{R}$ pour dire que le nombre 3 est un nombre réel.
- Si on veut définir l'ensemble de tous les réels sauf le nombre 3, on peut écrire : $\mathbb{R} - \{3\}$ ou $\mathbb{R} \backslash \{3\}$
- On appelle parfois $\mathbb{R}^*$ l'ensemble de tous les réels privé du nombre 0.
- Pour nommer l'ensemble des nombre réels positifs, on peut écrire : $\mathbb{R}_+$.
- De même, $\mathbb{R}_-$ représente les nombres réels négatifs.

**S'évaluer : Niveau ***

**QCM n°1**

## II. L'ensemble $\mathbb{N}$

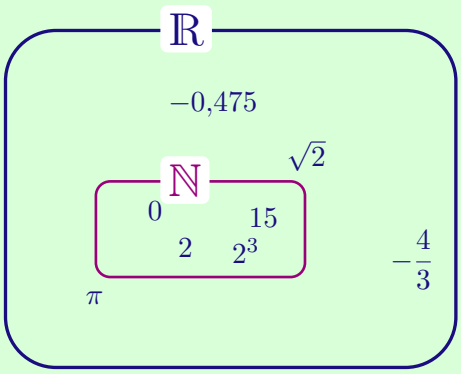
**Définition :** Niveau *

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$. C'est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de compter une collection d'objets.

**Propriété :** Niveau *

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est un **sous-ensemble** de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

**Illustration :** Niveau *




**Vidéo de cours :**

**Notations :** **Niveau ***

- On note $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N} - \{0\}$ ou $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- On utilise $\subset$ pour dire qu'un ensemble est inclus dans un autre ensemble.

## Méthode n°1 : Déterminer si des nombres sont des entiers.

Niveau *

**Stratégie :**
Attention aux écritures particulières de certains entiers, qui peuvent être piégeuses....

**Énoncé :**

Pour chacun des nombres suivants, compléter avec le bon symbole :

**Correction :**

$245 \ldots \mathbb{N}$; $-5 \ldots \mathbb{N}$; $2^5 \ldots \mathbb{N}$

$\frac{3}{5} \ldots \mathbb{N}$; $\frac{15}{5} \ldots \mathbb{N}$

$0 \ldots \mathbb{N}$; $0 \ldots \mathbb{N}^*$

**S'évaluer :**

**QCM n°2**

## III. L'ensemble $\mathbb{Z}$

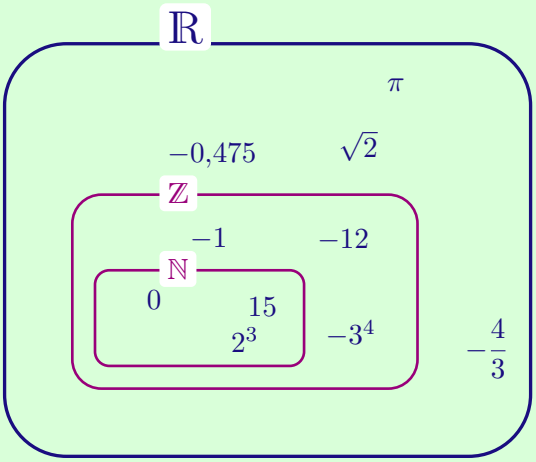
**Définition :** **Niveau ***

L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Il est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés.

**Remarque :** **Niveau ***

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

**Illustration :**




**Vidéo de cours :**

**Remarque** **Niveau ****

L'ensemble $\mathbb{N}$ est *inclus* dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

**Attention !! Ne pas confondre $\in$ et $\subset$** **Niveau ****

**Exemple :**
Soit $A = \{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$
On a $-3 \in A$ et $-4 \notin A$
Par contre, $A \not\subset \mathbb{N}$
Mais on peut dire que : $A \subset \mathbb{Z}$ donc $A$ est un *sous-ensemble* de $\mathbb{Z}$.
Bilan :

- Pour un **élément** qui appartient à un **ensemble**, on utilise $\in$.
- Pour un **ensemble** qui est inclus dans un **ensemble**, on utilise $\subset$.

## IV. Nombres décimaux $\mathbb{D}$

**Définition** — **Niveau ***

Les nombres décimaux sont les nombres de la forme $\dfrac{a}{10^n}$, où $a$ est un entier et $n$ un entier naturel.
L'ensemble des *nombres décimaux* est noté $\mathbb{D}$.

**Vidéo de cours :**

**Remarques** — **Niveau ***

- En pratique, ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre *fini* de chiffres après la virgule.
- Le nombre $a$ étant un entier, il peut être négatif.

**Exemples** — **Niveau ***

$0{,}2 = \dfrac{2}{10^1} \in \mathbb{D}$ ; $-0{,}41 = -\dfrac{41}{10^2} \in \mathbb{D}$ ; $\dfrac{3}{4} = \dfrac{75}{10^2} \in \mathbb{D}$ ; $-13 = \dfrac{-13}{10^0} \in \mathbb{D}$ ;

**Démonstration Fondamentale : Le nombre $\dfrac{1}{3}$ appartient-t-il à l'ensemble $\mathbb{D}$ ?**

**Démonstration par l'absurde ? Késako ??** — **Niveau ****

Nous allons procéder à un **raisonnement par l'absurde :**
Le **raisonnement par l'absurde** est une stratégie de démonstration fondamentale en mathématiques.
Elle sert uniquement à prouver qu'une affirmation est **fausse**.
Pour cela, on *suppose* que l'affirmation est vraie et on cherche à obtenir une contradiction.
L'incohérence obtenue prouve que la supposition initiale est fausse.
Attention, le **raisonnement par l'absurde** ne permet pas de prouver qu'une affirmation est vraie. Il serait en effet impossible d'obtenir une contradiction.

**Vidéo de cours :**

**Démonstration Fondamentale :** — **Niveau ****

Supposons que $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{D}$ (**Hypothèse de départ**)
D'après la définition de $\mathbb{D}$, il existe alors un entier $a$ et un entier naturel $n$ tels que :

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$$

$$\iff a = \frac{10^n}{3}$$

Or $10^n$ n'est pas divisible par 3 (la somme des chiffres est égale à 1).
Donc $a = \dfrac{10^n}{3}$ n'est pas un entier.
Ce qui est en **contradiction** avec l'hypothèse émise sur $a$.
On a donc prouvé que :

$$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

## Méthode n°2 : Déterminer si des nombres sont des décimaux. Niveau *

**Stratégie :**
Attention aux écritures particulières, qui peuvent être piégeuses....

**Énoncé :**

Pour chacun des nombres suivants, compléter avec le bon symbole :

**Correction :**

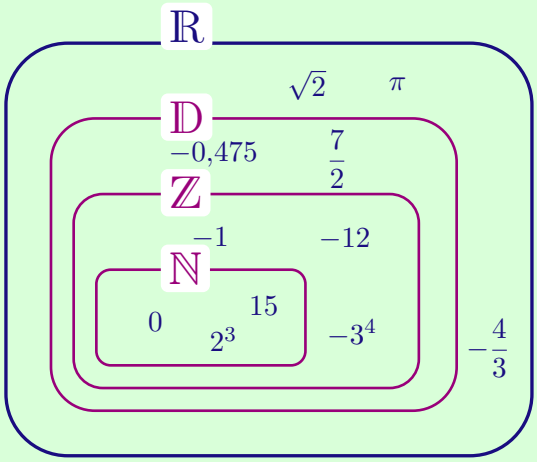
$\frac{2}{3} \ldots \mathbb{D}$; $\frac{3}{3} \ldots \mathbb{D}$

$0{,}3333333 \ldots \mathbb{D}$; $\pi \ldots \mathbb{D}$

$\sqrt{2} \ldots \mathbb{D}$; $\mathbb{Z} \ldots \mathbb{D}$

**Vidéo de méthode : Pièges avec les décimaux. Niveau ****

## Illustration Niveau *




**S'évaluer :**

**QCM n°3**

## Pour aller plus loin : Niveau : ***

Démontrer que $\frac{9}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

## V. Nombres rationnels $\mathbb{Q}$

### Définition Niveau *

L'ensemble des **nombres rationnels** est $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.
C'est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme le quotient d'un entier par un entier non nul.

**Vidéo de cours :**

**Remarques :** **Niveau ***

- Une fraction est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.
- La partie décimale d'un nombre rationnel est infinie et périodique à partir d'un certain rang.
  Exemple : $\frac{1}{7} \approx 0{,}\underline{142857}\ \underline{142857}\ \underline{142857}\ldots$
- La division par 0 est **interdite** :
  l'écriture $\frac{a}{0}$ n'a aucun sens.

**Vidéo de méthode :**

**Développement décimal d'un rationnel.**
**Niveau ****

## Méthode n°3 : Déterminer si des nombres sont des rationnels. Niveau *

**Stratégie :**
Attention aux écritures particulières, qui peuvent être piégeuses....

**Énoncé :**

Pour chacun des nombres suivants, compléter avec le bon symbole :

**Correction :**

$-13 \ldots \mathbb{Q}$ ; $0{,}5 \ldots \mathbb{Q}$ ;

$-\frac{1}{3} \ldots \mathbb{Q}$ ; $\frac{22}{7} \ldots \mathbb{Q}$ ;

$\mathbb{D} \ldots \mathbb{Q}$ ; $\pi \ldots \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \ldots \mathbb{Q}$

**Remarques :** **Niveau ****

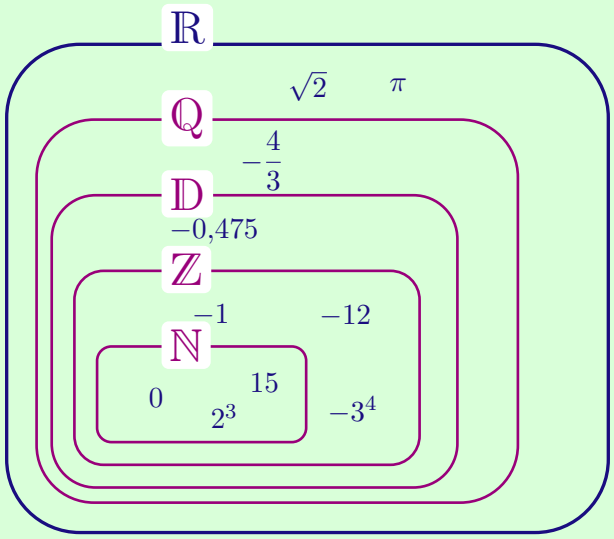
Pour le moment, on admet que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, mais on ne l'a pas prouvé.
La démonstration est au programme mais demande quelques notions d'arithmétiques du prochain chapitre.
La démonstration sera donc traitée prochainement. Pour ceux qui ne peuvent pas attendre...

**Vidéo de cours :**

**Pour aller plus loin :** **Niveau : ****

Démontrer que $0{,}99999\ldots = 1$ .

**Illustration** — **Niveau ***




On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

**S'évaluer :**

**QCM n°4**

**Programmer en Python** — **Niveau : ***

Écrire un programme qui détermine la fraction la plus proche de $\pi$.

## VI. Synthèse :

**Tous ensemble, tous ensemble :** — **Niveau ***

L'ensemble $\mathbb{R}$ comprend donc les nombres entiers, les décimaux, les fractions et les autres nombres (les irrationnels).
En résumé, c'est l'ensemble de tous les nombres connus au collège.

**Pour aller plus loin : Vidéos de Arte** — **Niveau ***

**Autre définition**
On peut aussi définir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble de tous les nombres $x$ tels que $x^2 \geqslant 0$.
Cette définition a un intérêt pour définir un autre ensemble de nombres, qui intégrera des nombres dont le carré sera négatif !!
Cela ouvre la porte à un nouvel ensemble, fondamental en maths mais hors programme de seconde. Il est introduit dans cette petite vidéo.

**Voyage au pays des maths :**
Vidéo de 10 minutes, d'une série très bien faîte publiée sur la chaîne Arte, qui reprend les bases de ce cours et va beaucoup, beaucoup plus loin mais de manière accessible. N'hésitez pas à vénir me voir si vous avez des questions/remarques après cette vidéo.

## VII. Travailler seul

**Exercice 1**

Sans utiliser de calculatrice, compléter le tableau par OUI ou NON :

| Appartient à | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-5$ | | | | | |
| $\frac{1}{3}$ | | | | | |
| $\frac{3}{4}$ | | | | | |
| $\sqrt{2}$ | | | | | |
| $\frac{\sqrt{144}}{3}$ | | | | | |
| $\pi$ | | | | | |

Correction en vidéo

**Exercice 2**

Donner la nature des nombres suivants, sans utiliser de calculatrice :

a. $\frac{7}{21}$

b. $\frac{21}{7}$

c. $\frac{\pi}{5\pi}$

Correction en vidéo

**Exercice 3**

Donner la nature des nombres suivants, sans utiliser de calculatrice :

a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

b. $\frac{2{,}4}{0{,}3}$

c. $-\frac{561}{3}$

Correction en vidéo

**Auto-évaluation de fin de chapitre :**

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Je connais tous les ensembles de nombres. | | | | |
| Je sais associer tout réel à son plus petit ensemble possible. | | | | |
| Je connais la définition d'un décimal, d'un rationnel, d'un irrationnel | | | | |

0 : Je ne sais pas faire, je ne comprends pas de quoi il s'agit.
1 : Je sais que j'ai du mal avec cette notion, je l'ai assez mal comprise ou oubliée.
2 : Je pense savoir faire.
3 : Je sais que je maîtrise cette notion.