Le Cours

Signe d'un trinôme du second degré

2

(Le second degré)

I. Polynôme et trinôme

Définition : Niveau *

On appelle **monôme**, un terme s'écrivant sous la forme ax^n, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exemples : Niveau *

- $2x^3$ est un monôme de degré 3,
- $-2x$ est un monôme de degré 1.
- $3 = 3 \times x^0$ est un monôme de degré 0.
- $\dfrac{2}{x} = 2x^{-1}$ n'est pas un monôme, l'exposant n'est pas un entier naturel.

Définition : Niveau *

On appelle **polynôme**, une somme de monômes.
Le degré d'un polynôme est le plus grand degré des monômes.

Exemples : Niveau *

- $2x^3 + 3x^2 - x + 1$ est un polynôme de degré 3,
- $-2x^2 - 3$ est un polynôme de degré 2.

Remarque : Niveau *

Dans cette partie, on va étudier le signe des polynômes de degré 2.
La forme générale d'un tel polynôme est $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
On parle aussi de **trinôme** du second degré.

II. Factorisation :

Propriété : Niveau *

Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$:

- Si $\Delta < 0$ alors le trinôme ne se factorise pas.
- Si $\Delta = 0$ en notant x_0 l'unique racine : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$ en notant x_1 et x_2 les deux racines : $f(x) = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$.

Vidéo de cours :

Démonstration : **Niveau ****

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.
On peut écrire f sous forme canonique, en revenant à la définition de cours :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

- Si $\Delta < 0$:
  $f(x)$ est alors le produit par a d'une somme de deux nombres positifs.
  En conséquence, le trinôme ne se factorise pas.

- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

  Soit en notant $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ l'unique racine, on a :

  $$f(x) = a(x - x_0)^2$$

- Si $\Delta > 0$:
  alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.
  Soit en notant $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  les deux racines, on a :

  $$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

Méthode n°1 : Factoriser un trinôme de degré 2

Niveau *

Stratégie :
On calcule le discriminant et selon son signe, avec la propriété de cours, on conclut.

Énoncé :
Factoriser l'expression $4x^2 - 3x - 1$

Correction :

Correction
en vidéo

Méthode n°2 : Factoriser un trinôme de degré 2

Niveau *

Stratégie :
On calcule le discriminant et selon son signe, avec la propriété de cours, on conclue.

Énoncé :
Factoriser l'expression $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

Correction :

Correction en vidéo

S'entraîner avec Mathalea

QCM n°1

note :

III. Signe d'un trinôme du second degré :

Propriété :

Niveau *

Soit f un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$.
  alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$
  et $f(x)$ est du signe contraire de celui de a pour tout réel $x \in]x_1; x_2[$.

Vidéo de cours

Démonstration : **Niveau ****

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est le produit par a d'une somme de deux nombres positifs donc le signe du trinôme est le signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ donc $f(x)$ est nul pour $x = -\dfrac{b}{2a}$; pour les autres valeurs de x le signe du trinôme est le signe de a.
- Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.
  Étudions le signe du produit $a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

A connaître par coeur ! **Niveau ***

« Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines
et du signe contraire de a entre les racines. »

Méthode n°3 : Résoudre une inéquation du second degré :

Niveau *

Stratégie :
On dresse le tableau de signes, selon le signe du discriminant, comme expliqué dans le cours.

Énoncé :
Résoudre l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3 \leqslant 0$

Correction :

Correction en vidéo

Exercices mathalea :

S'entraîner avec Mathalea

QCM n°2

note :

Méthode n°4 : Résoudre une inéquation quotient du second degré :

Niveau **

Stratégie :
Bien veiller au domaine de définition, dès qu'il y a un quotient.

Énoncé :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\dfrac{3x^2+x-2}{x-2} < 0$

Correction :

Aide pour démarrer.

Corrigé en pdf.

Correction en vidéo.

Méthode n°5 : Résoudre une inéquation quotient du second degré :

Niveau **

Stratégie :

Montrer que $A \geqslant B \iff A - B \geqslant 0$

Énoncé :

Démontrer que pour tout x strictement positif, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Correction :

Correction en vidéo

Auto-évaluation de fin de chapitre :

	0	1	2	3
Factoriser un polynôme de degré 2.				
Étudier le signe d'un polynôme de degré 2.				
Résoudre une inéquation de degré 2.				
Résoudre une inéquation utilisant le second degré.				

0 : Je ne sais pas faire, je ne comprends pas de quoi il s'agit.
1 : Je sais que j'ai du mal avec cette notion, je l'ai assez mal comprise ou oubliée.
2 : Je pense savoir faire.
3 : Je sais que je maîtrise cette notion.