Le Cours

1. Le logarithme

(1ère partie)

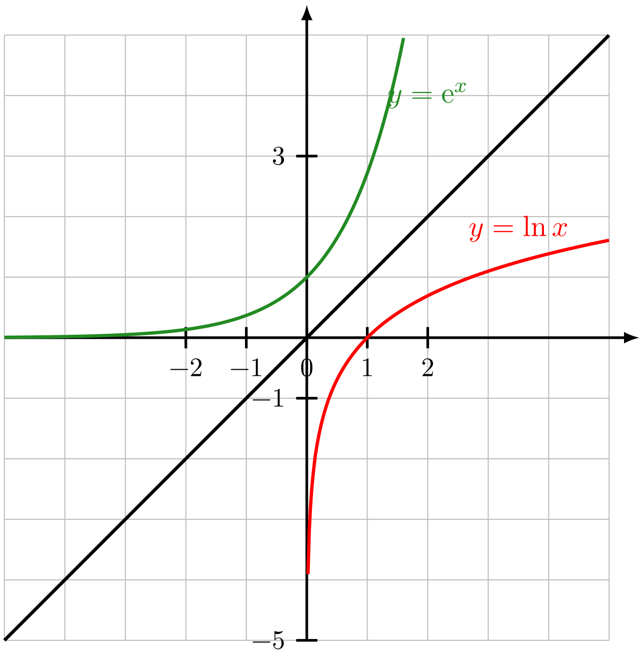
I. Fonction logarithme népérien

1. Introduction :

Lien avec l'exponentielle :

Pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel α tel que $e^{\alpha} = a$ (Démontré au prochain chapitre, patience !!)
On définit une nouvelle fonction appelée **logarithme népérien** qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.
On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction **réciproque** de la fonction exponentielle.

Vidéo de cours



Propriété graphique :

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. Définition :

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $e^y = x$.

$$x > 0 \text{ et } y = \ln(x) \text{ équivaut à } x = e^y$$

Vidéo de cours

Remarques :

- On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
- $\mathrm{e}^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ donc $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

3. Conséquences immédiates

Remarques :

1. Pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel $x, \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.
3. Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

Démonstration :

1. Pour tout réel $x > 0$, $y = \ln x \iff \mathrm{e}^y = x$. Soit $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x = y \iff x = \ln(y) = \ln\left(\mathrm{e}^x\right)$. Soit $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.

Méthode n°1 : Appliquer la définition :

Stratégie :
Bien intégrer que les fonctions exponentielles et logarithme népérien sont des fonctions réciproques.

Énoncé :
Calculer :

$A = \mathrm{e}^{\ln 5}$ $\qquad B = \mathrm{e}^{-\ln 0,1}$

$C = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ $\qquad D = \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$

Correction :

4. Variation :

Variations :

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration :

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = \mathrm{e}^{\ln a}$ et $b = \mathrm{e}^{\ln b}$.
Ainsi, $\mathrm{e}^{\ln a} < \mathrm{e}^{\ln b}$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante, on en déduit $\ln a < \ln b$.

Méthode n°2 : Étudier les variations d'une fonction exponentielle.

Stratégie :
Se servir des propriétés du logarithme népérien pour trouver les valeurs remarquables.

Énoncé :
Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = e^x - 2x$$

Correction :

5. Conséquences

Propriété :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $\ln a = \ln b$ si, et seulement si, $a = b$
- $\ln a > \ln b$ si, et seulement si, $a > b$

Méthode n°3 : Résoudre des équations en logarithme.

Stratégie :
Utiliser la propriété précédente pour se "dégager" des logarithmes, en étant prudent avec le domaine de définition.

Énoncé :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ par
$$\ln(3x + 1) = 1$$

Correction :

Méthode n°4 : Résoudre des inéquations en logarithme.

Stratégie :
Utiliser la propriété précédente pour se "dégager" des logarithmes, en étant prudent avec le domaine de définition.

Énoncé :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ par

$$\ln(5-2x) = \ln(x+1)$$

Correction :

II. Propriétés algébriques :

Propriété fondamentale :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Vidéo de cours

Démonstration :

Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels strictement positifs,
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = \mathrm{e}^{\ln a}$, $b = \mathrm{e}^{\ln b}$ et $a \times b = \mathrm{e}^{\ln(a \times b)}$
D'autre part,

$$a \times b = \mathrm{e}^{\ln a} \times \mathrm{e}^{\ln b} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$$

D'où

$$\mathrm{e}^{\ln(a \times b)} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$$

Donc $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

Propriétés déduites de la précédente :

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Démonstration :

- Soit $a > 0$ alors $\dfrac{1}{a} > 0$. Or $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc

$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 \iff \ln a + \ln\frac{1}{a} = 0 \iff \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$

- Soient $a > 0$ et $b > 0$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

- Soient $a > 0$ un réel strictement positif et n un entier relatif,

$$\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = a^n \text{ et } \mathrm{e}^{n\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^n = a^n$$

Donc $\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = \mathrm{e}^{n\ln a}$ et par conséquent, $\ln(a^n) = n\ln a$.
- Soit $a > 0$ alors $(\sqrt{a})^2 = a$ donc

$$\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2\ln\sqrt{a}$$

Méthode n°5 : Utiliser les propriétés calculatoires du logarithme népérien

Stratégie :
Bien appliquer les relations précédentes dans le bon contexte.

Énoncé :
Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants :

$A = \ln 8$ $\qquad$ $B = \ln\dfrac{1}{16}$

$C = \dfrac{1}{2}\ln 16$ $\qquad$ $D = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{4}$

Correction :

III. Logarithme décimal

Définition :

La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Méthode n°6 : Valeurs particulières :

Stratégie :
Bien différencier les deux logarithmes, le décimal donnant des valeurs numériques pratiques.

Énoncé :
Sans calculatrice, calculer :

- $\log(1)$
- $\log(10)$
- $\log(100)$
- $\log(0{,}1)$
- $\log(0{,}01)$

Correction :

Propriétés :

- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(ab) = \ldots\ldots\ldots$
- Pour tout réel $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $\log(a^n) = \ldots.$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\log(10^n) = \ldots.$
- $n = \log a \iff a = \ldots$

Fonction réciproque :

Le logarithme décimale est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$: $\log(10^x) = x$ et, $10^{\log(x)} = x$

Comparaison des deux logarithmes :

Le logarithme népérien possède une fonction réciproque simple, contrairement au logarithme décimal. Il est donc utilisé en priorité par les matheux pour tout ce qui tourne autour de l'analyse (étude de fonctions, équations, ..).
Le logarithme décimal donne des valeurs numériques très simples pour les puissances de 10, contrairement au logarithme népérien. C'est donc un bon outil pour mesurer, très utilisé en physique, chimie, SVT.

Remarque :

Le logarithme népérien est parfois notée (dans la littérature anglo-saxone notamment) log au lieu de ln, tandis que le logarithme décimal est noté $\log_{10}$, ou encore *Log*.