Plan de travail

Logarithme népérien

1

1 Équations, inéquations

Exercice 1 : Propriété exponentielle

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

- $A = e^{-4x} \times e^{2x}$
- $C = \dfrac{(e^{2x})^3}{e^{x+1}}$
- $B = \dfrac{e^x}{e^{-2x}}$
- $D = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x}}$

Sesamath

Exercice 2 : Equations avec exponentielle

1) Quel est le nombre de solutions de l'équation $e^x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$?

2) Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $e^x = 0$ b) $e^x = 1$ c) $e^x = e$ d) $e^x = \dfrac{1}{e}$

Sesamath

Exercice 3 : Ensemble de définition

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels vérifiant les conditions données.

1) $2x - 1 > 0$ et $-3x + 5 > 0$

2) $1 - x > 0$ et $x^2 + 3x - 4 < 0$

Sesamath

Exercice 4 : Equation simple

Résoudre les équations suivantes.

1) $\ln(2x-1) = 0$

2) $\ln(x - e) = 1$

3) $2\ln(x) + 1 = -3$

4) $e^{5-2x} = 2$

Sesamath

Exercice 5 : Inéquation simple

Résoudre les inéquations suivantes.

1) $\ln(1-x) > 0$

2) $\ln(3-2x) \leqslant 1$

3) $3e^x - 1 < 8$

4) $e^{2x} - 3e^x \geqslant 0$

Sesamath

Exercice 6 : Inéquations niveau II

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln\left(\dfrac{5x+1}{x-2}\right) \leqslant 0$

2) $\ln\left(x^2 + 2x\right) - 1 > 0$

3) $6e^x - 1 \geqslant 3 - 4e^x$

4) $3e^{2x} - 9e^x < 0$

Sesamath

Exercice 7 : Changement de variables

On veut résoudre l'équation :

$\ln(x)^2 + 4\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) - 5 = 0 \quad (E)$.

1) On pose $X = \ln x$, montrer que l'équation revient alors à résoudre $X^2 - 4X - 5 = 0 \quad (E')$.

2) Résoudre (E'), en déduire les solutions de (E).

Sesamath

Exercice 8 : Equations niveau II

Résoudre les équations suivantes.

1) $\ln(3x-6) = \ln(4-x)$

2) $\ln(x) + \ln(8-x) = \ln(12)$

3) $\ln(2x) - \ln(x+1) = \ln(x-5)$

Sesamath

Exercice 9 : Inéquations niveau III

Résoudre les inéquations suivantes.

1) $\ln(4x-2) + \ln(5) < 1 - \ln 2$

2) $\ln(5-x) \geqslant \ln(x-1)$

3) $\ln(x-2) + \ln(x+2) \geqslant 0$

Sesamath

Exercice 10 : Inéquations niveau IV

Résoudre les inéquations suivantes.

1) $\ln\left(x^2 - 4x + 4\right) - \ln(x-2) < \ln(8-x)$

2) $\ln(2x+4) + \ln(1-x) - \ln 2 \geqslant \ln(-x)$

Sesamath

Exercice 11 : Fonctions

Soit les fonctions f et g définies sur $]2;4[$ par $f : x \mapsto \ln(3x-6)$ et $g : x \mapsto 2\ln(4-x)$.

1) Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g s'$ interceptent-elles ?

2) Quelle est la position relative de ces deux courbes ?

Sesamath

2 Propriétés algébriques

Exercice 12

Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln a$, avec a un réel strictement positif.

1) $A = 2\ln 5 - \ln 15$

2) $B = -\ln 3 + 4\ln 2 - \ln 5$

Exercice 13

Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 5$.

1) $A = 4\ln 5 + \ln 25 - 3\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

2) $B = \ln 125 - \dfrac{1}{2}\ln 25 + \ln\left(\dfrac{1}{25}\right) - 4\ln\sqrt{5}$

Exercice 14

Dans chaque cas déterminer les entiers naturels n tels que :

1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 10^{-4}$

2) $\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \geqslant 10^6$

3) $1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \geqslant 0,999$

4) $0,004 > \left(\dfrac{8}{9}\right)^{2n}$

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1
a) $A = \mathrm{e}^{-2x}$ b) $B = \mathrm{e}^{3x}$ c) $C = \mathrm{e}^{5x-1}$ d) $D = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}} - \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x}} = 1 - \mathrm{e}^{2x}$
Corrigé de l'exercice 2

1) Si $k \in \mathbb{R}_-$, l'équation n'admet aucune solution.
   Si $k > 0$, il existe une unique solution.
2) Résoudre chacune des équations suivantes :
   a) $S = \varnothing$
   b) $S = \{0\}$
   c) $S = \{1\}$
   d) $S = \{-1\}$

Corrigé de l'exercice 3

1) $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{I} =]\frac{1}{2}; +\infty[$ et $-3x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{J} =] - \infty; \frac{5}{3}[$
   Il faut que $x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J} =]\frac{1}{2}; \frac{5}{3}[$.
2) $1 - x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{I} =] - \infty ; 1[$ et $x^2 + 3x - 4 < 0$
   $\Leftrightarrow x \in \mathrm{J} =] - \infty; -4[\cup]1; +\infty[$ (calcul de $\Delta = 25; x_1 = -4$ et $x_2 = 1$)
   Il faut que $x \in| \cap \mathrm{J} =] - \infty; -4[$.

Corrigé de l'exercice 4
a) Conditions d'existence :

$$x \in \mathrm{I} =]\frac{1}{2}; +\infty[$$
$$2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \in \mathrm{I}$$

b) Conditions d'existence :

$$x \in \mathrm{I} =]\mathrm{e}; +\infty[$$
$$x - \mathrm{e} = \mathrm{e} \Leftrightarrow x = 2\mathrm{e} \in \mathrm{I}$$

c) $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-2}$ d) $5 - 2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2} - \dfrac{\ln 2}{2}$
Corrigé de l'exercice 5
a) Conditions d'existence :

$$x \in \mathrm{I} =] - \infty; 1[$$
$$1 - x > 1 \text{ et } x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x < 0 \text{ et } x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x \in] - \infty; 0[$$

b) Conditions d'existence :

$$x \in \mathrm{I} =] - \infty; \frac{3}{2}[$$
$$3 - 2x \leqslant \mathrm{e} \text{ et } x \in \mathrm{I}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-\mathrm{e}}{2}; +\infty\right[\text{ et } x \in \mathrm{I}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-\mathrm{e}}{2}; \frac{3}{2}\right[$$

c) $\mathrm{e}^x < 3 \Leftrightarrow x < \ln 3 \Leftrightarrow x \in] - \infty; \ln 3[$ d) $\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 3) \geqslant 0$ or $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x, cela revient donc à résoudre :

$$\mathrm{e}^x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 3 \text{ donc } x \in [\ln 3; +\infty[$$

Corrigé de l'exercice 6

1) $S = \left[-\dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{5}\right[$
2) Donc $S =] - \infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$
   avec $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{2 + 2e}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{2 + 2e}}{2}$

3) $S = \left[\ln\left(\frac{2}{5}\right); +\infty\right[$

4) $S =]-\infty; \ln 3[$

Corrigé de l'exercice 7

1. $(\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$

Avec $X = \ln x$, on a $X^2 - 4X - 5 = 0$

2. $\Delta = 36$ donc $X_1 = -1$ et $X_2 = 5$

3. Soit $\ln x = -1$ et $\ln x = 5$ donc $S = \left\{\mathrm{e}^{-1}; \mathrm{e}^{5}\right\}$

Corrigé de l'exercice 8

1) Conditions d'existence : $x > 2$ et $x < 4$ donc $x \in \mathrm{I} =]2; 4[$ $3x - 6 = 4 - x$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

2) Conditions d'existence : $x \in \mathrm{I} =]0; 8[$ $x^2 - 8x + 12 = 0$ et $x \in 1 \Leftrightarrow S = \{2, 6\}$

3) Conditions d'existence :

$$\begin{aligned}
& x \in \mathrm{I} =]5; +\infty[\\
& \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln(x-5) \text{ et } x \in \mathrm{I} \\
& \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} = x - 5 \text{ et } x \in \mathrm{I} \\
& \Leftrightarrow x^2 6x - 5 = 0 \text{ et } x \in \mathrm{I} \\
& \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{14}.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 9

a) $x > \frac{1}{2}$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}}{40}\right[$ b) Conditions d'existence :

$$\begin{aligned}
& x \in \mathrm{I} =]1; 5[\\
& 5 - x \geqslant x - 1 \text{ et } x \in \mathrm{I} \\
& \Leftrightarrow x \leqslant 3 \text{ et } x \in \mathrm{I} \\
& \Leftrightarrow x \in]1; 3].
\end{aligned}$$

c) Conditions d'existence :

$$\begin{aligned}
& x \in \mathrm{I} =]2; +\infty[\\
& x^2 - 5 \geqslant 0 \text{ et } x \in \mathrm{I} \\
& \Leftrightarrow x \in]\sqrt{5}; +\infty[
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10

a) Conditions d'existence :

$x^2 - 4x + 4 > 0$ et $x - 2 > 0$ et $8 - x > 0$ soit $x \in \mathrm{I} =]2; 8[$

$\ln\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}\right) < \ln(8 - x)$ et $x \in 1$

$\Leftrightarrow \ln(x - 2) < \ln(8 - x)$ et $x \in 1$

car $x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2$

ce qui revient à résoudre $x - 2 < 8 - x$ et $x \in \mathrm{I}$.

D'où $S =]2; 5[$

Corrigé de l'exercice 11

1. Afin de savoir si les courbes s'interceptent, il s'agit de résoudre

$$\begin{aligned}
& f(x) = g(x) \text{ soit } \ln(3x - 6) = 2\ln(4 - x) \\
& \Leftrightarrow \ln(3x - 6) = \ln\left((4 - x)^2\right) \text{ et } x \in I = \left]2; 4\right[\\
& \Leftrightarrow 3x - 6 = (4 - x)^2 \text{ et } x \in \mathrm{I} \\
& \Leftrightarrow x^2 - 11x + 22 = 0 \text{ et } x \in \mathrm{I} \\
& \Delta = 33 \text{ donc } x_1 = \frac{11 - \sqrt{33}}{2} \in \mathrm{I} \text{ et } x_2 = \frac{11 + \sqrt{33}}{2} \notin \mathrm{I}
\end{aligned}$$

Par conséquent, les courbes s'interceptent en un seul point de coordonnées : $(x_1; f(x_1) = g(x_1))$.

2. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, il faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$, ce qui revient à étudier le signe de $3x - 6 - \left(16 - 8x + x^2\right)$ soit le signe de $-x^2 + 11x - 22$ sur I.
La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc strictement en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]2; x_1[$ et strictement au-dessus sur $]x_1; 4[$.

Corrigé de l'exercice 12

1) $A = \ln 25 - \ln 15 = \ln\left(\frac{25}{15}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

2) $B = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln 16 - \ln 5 = \ln\left(\frac{16}{15}\right)$

Corrigé de l'exercice 13

1) $A = 4\ln 5 + 2\ln 5 + 3\ln 5 = 9\ln 5$

2) $B = 3\ln 5 - \ln 5 - 2\ln 5 - 2\ln 5 = -2\ln 5$

Corrigé de l'exercice 14

a) $n\ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln\left(10^{-4}\right) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\left(10^{-4}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ soit $n \geqslant 23$.

b) $n\ln\left(\frac{9}{7}\right) \geqslant \ln\left(10^{6}\right) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln\left(10^{6}\right)}{\ln\left(\frac{9}{7}\right)}$

Soit $n \geqslant 55$.