Plan de travail

Les ensembles de nombres.

(Manipuler les nombres réels.)

Thème

Nombres et calculs.

Ce plan de travail appartient à : ....

Parcours 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Exercice 1 : Connaissance du cours

Dire quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

$\sqrt{71}$	28	$\dfrac{90}{15}$
$-0{,}47$	-49	
	$\sqrt{225}$	2π
$\dfrac{43}{3}$	$\dfrac{38}{5}$	$\dfrac{51}{5}$

Mathalea

Exercice 2 : Avec des opérations

Quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

$A = \dfrac{1}{2}$

$E = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$

$B = 2 - 5$

$F = \sqrt{16} - \sqrt{25}$

$C = \dfrac{10-4}{3}$

$G = \dfrac{91}{7}$

$D = -\sqrt{16}$

$H = \dfrac{34}{2} - \sqrt{289}$

Exercice 3 : Décimal ?"

Lesquels de ces nombres sont décimaux ?

$A = -5$ $\quad B = \dfrac{5}{7}$ $\quad C = \dfrac{3}{40}$ $\quad D = \dfrac{40}{3}$

Exercice 4 : Démontrer

Raoul affirme que "*Le produit de deux nombres irrationnels est toujours un nombre rationnel.*"

Est-ce vrai ?

Exercice 5 : Démontrer

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est toujours vraie. Si elle est fausse, donner un contre exemple.

1) La différence de deux entiers naturels est un entier naturel.
2) Le quotient de deux décimaux est un décimal.
3) Le quotient de deux réels est un rationnel.
4) Le produit d'un rationnel par un entier relatif est un rationnel.

Parcours 2

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Exercice 6 : Démontrer

Dire si les phrases sont vraies ou fausses, en expliquant.

1) La somme de deux irrationnels est un irrationnel.
2) Le carré d'un irrationnel peut être un entier naturel.
3) La racine carrée d'un entier peut être un nombre relatif.

Exercice 7 : Avec des lettres !!

Soit $x \in \mathbb{N}$. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est fausse ou toujours vraie.

Si elle est fausse, donner un contre-exemple et donner le plus petit ensemble qui la rende toujours vraie.

$2x + 1 \in \mathbb{N}$ $\quad 3x - 7 \in \mathbb{N}$ $\quad \dfrac{x+1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$

$2x + 1 \in Q$ $\quad \dfrac{x-6}{2} \in \mathbb{Z}$ $\quad \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$

Exercice 8

Trouver, quand cela est possible, un nombre x qui remplit les critères suivants :

$x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{N}$ $\quad x \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Z}$

$x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ $\quad x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{R}$

Exercice 9

Soit A $= \dfrac{-1}{3} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{9}{2}$ et B $= 0,25 - \dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$.

1. a. Donner un nombre $x \in \mathbb{N}$ tel que $A \in \mathbb{N}$.

b. Donner un nombre $x \in \mathbb{Z}$ tel que $A \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{D}$.

2. a. Donner un nombre $x \in \mathbb{Z}$ tel que $B \in \mathbb{D}$.

b. Donner un nombre $x \in \mathbb{Z}$ tel que $B \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Sesamath

Exercice 10

On considère un cercle dont le périmètre est rationnel. Prouver que son diamètre est nécessairement irrationnel.

Exercice 11 : Démonstration fondamentale

Démontrer que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

Exercice 12 : Démonstration fondamentale

Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1
en ligne
Corrigé de l'exercice 2
$\frac{1}{2} = 0,5 \in \mathbb{D}$. De plus $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

$\sqrt{5} \in \mathbb{R}$. De plus $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ (cf démonstration racine 2).

$\frac{10-4}{3} = 2 \in \mathbb{N}$

$-\sqrt{16} = -4 \in \mathbb{Z}$. De plus $-4 < 0$ donc $-4 \notin \mathbb{N}$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1 \in \mathbb{N}$

$\sqrt{16} - \sqrt{25} = 4 - 5 = -1 \in \mathbb{Z}$. De plus $-1 \notin \mathbb{N}$

$\frac{91}{7} = 13 \in \mathbb{N}$

$\frac{34}{2} - \sqrt{289} = 0 \in \mathbb{N}$
Corrigé de l'exercice 3
1. $-5 = \frac{-5}{10^0}$ est décimal.
2. $\frac{5}{7}$ n'est pas décimal.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{5}{7} = \frac{a}{10^n}$.
On a alors : $5 \times 10^n = a \times 7$.
Comme $7a$ est un multiple de 7 alors 5×10^n est aussi un multiple de 7, ce qui est absurde car 7 est un nombre premier et ni 5 ni 10^n ne sont de multiples de 7 .
Donc $\frac{5}{7}$ n'est pas un nombre décimal. 3. $\frac{3}{40} = \frac{75}{1000}$ donc $\frac{3}{40}$ est un nombre décimal.
4. $\frac{40}{3}$ n'est pas décimal.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{40}{3} = \frac{a}{10^n}$.
On a alors : $40 \times 10^n = a \times 3$
$3a$ est un multiple de 3 donc 40×10^n aussi.
40×10^n est un multiple de 3 or la somme des chiffres de 40×10^n est 4 donc ce n'est multiple de 3 .
On a donc une contradiction. Donc $\frac{40}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
Corrigé de l'exercice 4
Pour démontrer que l'affirmation de Raoul est fausse il suffit de trouver un contre-exemple.
$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ prouve que le produit de deux irrationnels peut être un entier.
Corrigé de l'exercice 5
1. Faux : 5 et 7 sont des nombres entiers naturels mais. $5 - 7 = -2$ n'est pas un nombre entier naturel.
2. Faux : $1 = \frac{1}{10^0}$ et $3 = \frac{3}{10^\mu}$ sont des nombres décimaux mais 3 n'est pas un nombre décimal.
3. Faux : $\sqrt{2}$ et 1 sont des nombres réels mais $\frac{\sqrt{2}}{1} - \sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
4. Vrai : Soient $m = \frac{b}{b}$ un nombre rationnel où $b+0$ et $h \in \mathbb{Z}$ Par définition de $ma \in \mathbb{Z}$ et Ainsi, $hu \in \mathbb{Q}$, et ainsi : $m \times k - \frac{k\pi}{b} \in Q$
Corrigé de l'exercice 6
1- Faux. Par exemple, la somme d'un irrationnel et de son opposé est égale à zéro (qui est un rationnel et même un entier naturel).
2- Vrai. Par exemple, $\sqrt{2}^2 = 2$.
3- Vrai, bien sûr. Par exemple, $\sqrt{16} = 4$ et $4 \in \mathbb{Z}$.

Corrigé de l'exercice 7

1. Vrai : si x est un entier naturel, alors son double $2x$ le sera aussi et de même pour $2x+1$.
2. Vrai : on a vu dans la question précédente que $x \in \mathbb{N}$. Or. N $\in$ donc $x \in$
3. Faux : si $x = 2$, on a $3x - 7 = -1$ qui n'est pas un entier naturel. Mais $3x - 7 \in \mathbb{Z}$
4. Faux : si on prend $x = 1$ on a $\dfrac{x-6}{2} = -2,5$. Mais $\dfrac{x-6}{2} \in \mathbb{Q}$
4. Faux : si on prend $x = 1$
6. Faux : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Démonstration prochain chapitre.

Corrigé de l'exercice 8

1. Vrai : si x est un entier naturel, alors son double $2x$ le sera aussi et de même pour $2x+1$.
2. Vrai : on a vu dans la question précédente que $x \in \mathbb{N}$. Or. N $\in$ donc $x \in$
3. Faux : si $x = 2$, on a $3x - 7 = -1$ qui n'est pas un entier naturel. Mais $3x - 7 \in \mathbb{Z}$
4. Faux : si on prend $x = 1$ on a $\dfrac{x-6}{2} = -2,5$. Mais $\dfrac{x-6}{2} \in \mathbb{Q}$
4. Faux : si on prend $x = 1$
6. Faux : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Démonstration prochain chapitre.

Corrigé de l'exercice 9

Corrigé de l'exercice 10

Le périmètre du cercle est rationnel.

Notons P ce périmètre et raisonnons par l'absurde.

Pour cela supposons que le le diamètre d est rationnel. On a $p = \pi \times d$. Donc $\pi = \frac{p}{d}$ or p et d sont rationnels.

Donc d est rationnel. Donc π est rationnel, ce qui est absurde.

Donc le diamètre du cercle ne peut pas être rationnel. Donc le diamètre du cercle est irrationnel.

Corrigé de l'exercice 11

Voir le cours

Corrigé de l'exercice 12

Voir le cours