

Vers la forme canonique

2

Ce parcours d'exercices appartient à :

Parcours 1

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯

Parcours 2

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯

Exercice 1

- 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
 $-3x^2 - 30x - 72 = -3(x + 5)^2 + 3$
- 2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
 $x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$

Développer $-3(x - 3)^2$ et en déduire une écriture f ,
 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -3(x - 3)^2 + \beta$$

On précisera la valeur de β

Exercice 2

On donne la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
 $f(x) = x^2 + 6x + 4$.
 Développer $(x + 3)^2$ et en déduire une écriture f , telle
 que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (x + 3)^2 + \beta$$

On précisera la valeur de β

Exercice 3

On donne la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
 $f(x) = x^2 - 10x + 9$.
 Déterminer une écriture de f , telle que pour tout
 $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$$

On précisera la valeur de α et de β .

Exercice 4

On donne la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
 $f(x) = x^2 + 8x + 20$.
 Déterminer une écriture de f , telle que pour tout
 $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$$

On précisera la valeur de α et de β .

Exercice 5

On donne une fonction f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
 $f(x) = -3x^2 + 18x - 26$.

Exercice 6

On donne ci-dessous des expressions sous la forme
 $ax^2 + bx$ où x , a et b sont des réels tels que $a \neq 0$.
 Faire apparaître l'identité remarquable associée pour
 transformer l'expression sous la forme :

$$ax^2 + b = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où a et β sont des réels que l'on précisera.

- 1) $5x^2 + 10x$ 2) $-3x^2 - 8x$

Exercice 7

On donne la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
 $f(x) = 4x^2 + 24x + 96$.
 Déterminer une écriture de f , telle que pour tout
 $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a(x + 3)^2 + \beta$$

où a et β sont des réels que l'on précisera.

Exercice 8

On donne une fonction f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
 $f(x) = -3x^2 + 12x + 5$.
 Déterminer une écriture de f , telle que pour tout
 $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -3(x - \alpha)^2 + \beta$$

On précisera la valeur de α et de β .

Exercice 9

On donne une fonction f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 8x + 9$.

Déterminer une écriture de f , telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

On précisera la valeur de a , α et de β .

Exercice 10

On donne une fonction f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 40x + 96$.

Factoriser $f(x)$ par 4 puis en développant $(x + 5)^2$ en déduire une écriture f , telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 4(x + 5)^2 + \beta$$

On précisera la valeur de β

Exercice 11

On donne la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 40x + 96$.

Développer $(x + 3)^2$ et en déduire une écriture de f , telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a(x + 3)^2 + \beta$$

où a et β sont des réels que l'on précisera.

Exercice 12

En vous aidant du modèle proposé, transformez les expressions proposées sous la forme

$$ax^2 + b = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où a et β sont des réels que l'on précisera.

$$3x^2 + 12x = 3(x^2 + 4x) = 3((x + 2)^2 - 4) = 3(x + 2)^2 - 12$$

$$1) \quad 2x^2 + 4x$$

$$2) \quad -5x^2 + 30x$$

Exercice 13

En appliquant les formules de cours qui déterminent ses coefficients, déterminer la forme canonique de chacune des fonctions P , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$1) \quad P(x) = -x^2 - 8x - 13$$

$$2) \quad P(x) = -4x^2 + 24x - 35$$

$$3) \quad P(x) = x^2 + 2x - 4$$

$$4) \quad P(x) = -4x^2 + 16x - 18$$

Exercice 14

En effectuant la démonstration algébrique, déterminer la forme canonique de chacun des fonctions P , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$1) \quad P(x) = -x^2 - 8x - 13$$

$$2) \quad P(x) = -4x^2 + 24x - 35$$

$$3) \quad P(x) = x^2 + 2x - 4$$

$$4) \quad P(x) = -4x^2 + 16x - 18$$

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en utilisant la forme canonique du polynôme :

$$1) \quad x^2 - x - 3 = 0$$

$$3) \quad -x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$2) \quad -3x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$4) \quad -2x^2 - 3x - 3 = 0$$

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en utilisant la forme canonique du polynôme :

$$1) \quad x^2 - x - 3 = 0$$

$$3) \quad -x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$2) \quad -3x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$4) \quad -2x^2 - 3x - 3 = 0$$

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

Il suffit de développer !!

Corrigé de l'exercice 2

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$f(x) = x^2 + 6x + 4 = \underline{x^2 + 6x + 9} - 5 = (x+3)^2 - 5$$

$$\beta = -5$$

Corrigé de l'exercice 3

$$f(x) = (x-5)^2 - 16$$

$\alpha = 5$ (Attention au signe!!) et $\beta = -16$.

Corrigé de l'exercice 4

$$f(x) = (x+4)^2 + 4$$

$\alpha = -4$ (Attention au signe!! $x+4 = x - (-4)$) et $\beta = 4$.

Corrigé de l'exercice 5

$$-3(x-3)^2 = -3(x^2 - 6x + 9) = -3x^2 + 18x - 27$$

$$f(x) = -3x^2 + 18x - 26 = \underline{-3x^2 + 18x - 27} + 1 = -3(x-3)^2 + 1$$

$$\beta = 1.$$

Corrigé de l'exercice 6

$$1) 5x^2 + 10x = 5(x^2 + 2x) = 5((x+1)^2 - 1)$$

$$2) -3x^2 - 8x = -3(x^2 + \frac{8}{3}x) = \left((x + \frac{4}{3})^2 - \frac{16}{9}\right)$$

Corrigé de l'exercice 7

$$f(x) = 4(x+3)^2 + 60$$

$$a = 4 \text{ et } \beta = 60.$$

Corrigé de l'exercice 8

$$f(x) = -3(x-2)^2 + 17$$

$\alpha = 2$ (Attention au signe!!) et $\beta = 17$.

Corrigé de l'exercice 9

$$f(x) = 4(x-1)^2 + 5$$

Corrigé de l'exercice 10

Non corrigé

Corrigé de l'exercice 11

Non corrigé

Corrigé de l'exercice 12

$$1) 2(x^2 + 2x) = 2((x+1)^2 - 1) = 2(x+1)^2 - 2$$

$$2) -5x^2 + 30x = -5(x^2 - 6x) = -5((x-3)^2 - 9) = -5(x-3)^2 + 45$$

Corrigé de l'exercice 13

1) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme

$$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta,$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = P(\alpha).$$

Avec l'énoncé : $a = -1$ et $b = -8$, on en déduit que $\alpha = -4$.

On calcule alors $\beta = P(-4)$, et on obtient au final que $\beta = 3$.

$$\text{d'où, } P(x) = -1(x - (-4))^2 + 3$$

$$\text{Au final, } P(x) = -(x+4)^2 + 3$$

2) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme

$$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta,$$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Avec l'énoncé : $a = -4$ et $b = 24$, on en déduit que $\alpha = 3$.

On calcule alors $\beta = P(3)$, et on obtient au final que $\beta = 1$.

d'où, $P(x) = -4(x - 3)^2 + 1$

Au final, $P(x) = -4(x - 3)^2 + 1$

- 3) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Avec l'énoncé : $a = 1$ et $b = 2$, on en déduit que $\alpha = -1$.

On calcule alors $\beta = P(-1)$, et on obtient au final que $\beta = -5$.

d'où, $P(x) = 1(x - (-1))^2 + (-5)$

Au final, $P(x) = (x + 1)^2 - 5$

- 4) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Avec l'énoncé : $a = -4$ et $b = 16$, on en déduit que $\alpha = 2$.

On calcule alors $\beta = P(2)$, et on obtient au final que $\beta = -2$.

d'où, $P(x) = -4(x - 2)^2 + (-2)$

Au final, $P(x) = -4(x - 2)^2 - 2$

Corrigé de l'exercice 14

- 1) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Avec l'énoncé : $a = -1$ et $b = -8$, on en déduit que $\alpha = -4$.

On calcule alors $\beta = P(-4)$, et on obtient au final que $\beta = 3$.

d'où, $P(x) = -1(x - (-4))^2 + 3$

Au final, $P(x) = -(x + 4)^2 + 3$

- 2) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Avec l'énoncé : $a = -4$ et $b = 24$, on en déduit que $\alpha = 3$.

On calcule alors $\beta = P(3)$, et on obtient au final que $\beta = 1$.

d'où, $P(x) = -4(x - 3)^2 + 1$

Au final, $P(x) = -4(x - 3)^2 + 1$

- 3) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Avec l'énoncé : $a = 1$ et $b = 2$, on en déduit que $\alpha = -1$.

On calcule alors $\beta = P(-1)$, et on obtient au final que $\beta = -5$.

d'où, $P(x) = 1(x - (-1))^2 + (-5)$

Au final, $P(x) = (x + 1)^2 - 5$

- 4) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Avec l'énoncé : $a = -4$ et $b = 16$, on en déduit que $\alpha = 2$.

On calcule alors $\beta = P(2)$, et on obtient au final que $\beta = -2$.

d'où, $P(x) = -4(x - 2)^2 + (-2)$

Au final, $P(x) = -4(x - 2)^2 - 2$

Corrigé de l'exercice 15

1) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 3 = 0$ (1).

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

On en déduit que : $x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} x^2 - x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0$$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:

avec $a = \left(x - \frac{1}{2}\right)$ et $b = \sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2^2}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

L'équation à résoudre est équivalente à :

$$\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

On applique la propriété du produit nul :

Soit $x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = 0$, soit $x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2} = 0$

Soit $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$, soit $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

2) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-3x^2 - 4x - 3 = 0$ (1).

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,

On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici -3 .

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$$

On en déduit que : $x^2 + \frac{4}{3}x = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{4}{3}x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9} = 0$$

L'équation revient à ajouter deux nombres positifs, dont un non-nul. Cette somme ne peut pas être égale à zéro.

On en déduit que $S = \emptyset$

3) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 + 5x + 3 = 0$ (1).

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,

On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici -1 .

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{5}{1}x + \frac{25}{4}$$

$$\text{On en déduit que : } x^2 - \frac{5}{1}x = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

Il vient alors :

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4} = 0$$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:

$$\text{avec } a = \left(x - \frac{5}{2}\right) \text{ et } b = \sqrt{\frac{37}{4}} = \sqrt{\frac{37}{2^2}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

L'équation à résoudre est équivalente à :

$$\left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{5 + \sqrt{37}}{2}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{37}}{2}\right) = 0$$

On applique la propriété du produit nul :

$$\text{Soit } x - \frac{5 + \sqrt{37}}{2} = 0, \text{ soit } x - \frac{5 - \sqrt{37}}{2} = 0$$

$$\text{Soit } x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}, \text{ soit } x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{37}}{2}; \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \right\}$$

4) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x^2 - 3x - 3 = 0$ (1).

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,

On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici -2 .

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$$

$$\text{On en déduit que : } x^2 + \frac{3}{2}x = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

Il vient alors :

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} = 0$$

L'équation revient à ajouter deux nombres positifs, dont un non-nul. Cette somme ne peut pas être égale à zéro.

On en déduit que $S = \emptyset$

Corrigé de l'exercice 16

1) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 3 = 0$ (1).

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$\text{On en déduit que : } x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Il vient alors :

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0$$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:

avec $a = \left(x - \frac{1}{2}\right)$ et $b = \sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2^2}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

L'équation à résoudre est équivalente à :

$$\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

On applique la propriété du produit nul :

Soit $x - \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = 0$, soit $x - \frac{1 - \sqrt{13}}{2} = 0$

Soit $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$, soit $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

2) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-3x^2 - 4x - 3 = 0$ (1).

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,

On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici -3 .

$$(1) \iff x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$$

On en déduit que : $x^2 + \frac{4}{3}x = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}$

Il vient alors :

$$x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + 1 = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9} = 0$$

L'équation revient à ajouter deux nombres positifs, dont un non-nul. Cette somme ne peut pas être égale à zéro.

On en déduit que $S = \emptyset$

3) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 + 5x + 3 = 0$ (1).

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,

On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici -1 .

$$(1) \iff x^2 - 5x - 3 = 0$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{5}{1}x + \frac{25}{4}$$

On en déduit que : $x^2 - \frac{5}{1}x = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

Il vient alors :

$$x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 3 = 0$$

$$\iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4} = 0$$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:

avec $a = \left(x - \frac{5}{2}\right)$ et $b = \sqrt{\frac{37}{4}} = \sqrt{\frac{37}{2^2}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$

L'équation à résoudre est équivalente à :

$$\left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{5 + \sqrt{37}}{2}\right) \left(x - \frac{5 - \sqrt{37}}{2}\right) = 0$$

On applique la propriété du produit nul :

$$\text{Soit } x - \frac{5 + \sqrt{37}}{2} = 0, \text{ soit } x - \frac{5 - \sqrt{37}}{2} = 0$$

$$\text{Soit } x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}, \text{ soit } x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{37}}{2}; \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \right\}$$

4) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x^2 - 3x - 3 = 0$ (1).

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,

On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici -2 .

$$(1) \iff x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$$

$$\text{On en déduit que : } x^2 + \frac{3}{2}x = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

Il vient alors :

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} = 0$$

L'équation revient à ajouter deux nombres positifs, dont un non-nul. Cette somme ne peut pas être égale à zéro.

On en déduit que $S = \emptyset$