Le Cours

Les puissances

(Bases du calcul numérique)

Thème
Manipuler
les nombres réels

Auto-évaluation de début de chapitre :

	0	1	2	3
Connaître-utiliser définition et notations d'une puissance.				
Utiliser les puissances de 10 et préfixes.				
Utiliser les propriétés des puissances				
Utiliser-Connaître la notation scientifique.				

0 : Je ne sais pas faire, je ne comprends pas de quoi il s'agit.
1 : Je sais que j'ai du mal avec cette notion, je l'ai assez mal comprise ou oubliée.
2 : Je pense savoir faire.
3 : Je sais que je maîtrise cette notion.

I. Généralités sur les puissances

1. Définition

Définition : **Niveau** *

Soit $a \in \mathbb{R}$ (c'est à dire que a est un nombre quelconque)
et $n \in \mathbb{N}^*$ c'est à dire que n est un entier naturel différent de zéro.
Le nombre a, à la puissance n(on dit aussi " a exposant n") est définie par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Vidéo de cours :

Exemple : **Niveau** *

$$\begin{aligned} A &= 3^2 \\ &= 3 \times 3 \\ &= 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B &= (-4)^2 \\ &= (-4) \times (-4) \\ &= 16 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} C &= -4^2 \\ &= -4 \times 4 \\ &= -16 \end{aligned}$$

Attention : **Niveau** *

On observera bien la différence entre les exemples B et C, en respectant les priorités de calculs.
L'exposant est prioritaire sur le signe - dans le C.

2. Cas particuliers :

Cas où $n = 1$: **Niveau** *

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$a^1 = a$$

Exemple : **Niveau** *

$$A = 3^1 = 3$$

Convention : **Niveau** *

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, c'est à dire pour tout réel a non-nul, on a :

$$a^0 = 1$$

Exemple :

$$A = 8^0 = 1$$

Attention :

0^0 n'existe pas !

3. Généralisation : Découverte des exposants négatifs

On comprend assez facilement l'algorithme des puissances :

Étape 1 **Niveau ***

En multipliant à chaque fois par le même nombre, l'exposant augmente de 1 à chaque étape.

$$3^1 \xrightarrow{\times 3} 3^2 \xrightarrow{\times 3} 3^3 \xrightarrow{\times 3} 3^4$$

$$3^1 \xrightarrow{\text{exposant } +1} 3^2 \xrightarrow{\text{exposant } +1} 3^3 \xrightarrow{\text{exposant } +1} 3^4$$

Essayons de remonter cet algorithme vers la gauche :

Étape 2 **Niveau ***

**En divisant à chaque fois par le même nombre,
l'exposant baisse de 1 à chaque étape.**

$$3^1 \xleftarrow{\div 3} 3^2 \xleftarrow{\div 3} 3^3 \xleftarrow{\div 3} 3^4$$

$$3^1 \xleftarrow{\text{exposant } -1} 3^2 \xleftarrow{\text{exposant } -1} 3^3 \xleftarrow{\text{exposant } -1} 3^4$$

En poursuivant cet algorithme vers la gauche, on va définir naturellement les exposants négatifs :

Poursuivons "à contre courant", vers la gauche.
On va définir naturellement les exposants négatifs :

Étape 3 **Niveau ***

**En poursuivant la suite décroissante des exposants,
on invente les exposants négatifs :**

$$\boxed{3^{-2}} \xleftarrow{\div 3} \boxed{3^{-1}} \xleftarrow{\div 3} 3^0 \xleftarrow{\div 3} 3^1 \xleftarrow{\div 3} 3^2$$

$$\boxed{3^{-2}} \xleftarrow{\text{exposant } -1} \boxed{3^{-1}} \xleftarrow{\text{exposant } -1} 3^0 \xleftarrow{\text{exposant } -1} 3^1 \xleftarrow{\text{exposant } -1} 3^2$$

Étape 4 **Niveau ***

**En divisant à chaque fois par 3,
on arrive à calculer la valeur des nombres à exposants négatifs.**

$$3^{-2} \xleftarrow{\div 3} 3^{-1} \xleftarrow{\div 3} 3^0 \xleftarrow{\div 3} 3^1 \xleftarrow{\div 3} 3^2$$

3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$\boxed{\frac{1}{3^2}}$	$\boxed{\frac{1}{3^1}}$	$\boxed{3^0}$	$\boxed{3^1}$	$\boxed{3^2}$

Notations : **Niveau ****

On accepte donc d'écrire : $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} \quad ; \quad 3^{-1} = \dfrac{1}{3^1}$

4. Définition :

Définition : **Niveau ****

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On convient que : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemples : **Niveau ****

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Attention ! — Niveau **

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \qquad -5^3 = -5^3 = -5 \times 5 \times 5 = -125$$

QCM n°1 :

II. Puissances de 10

1. Généralités :

Propriété : — Niveau *

On a en particulier avec $n \in \mathbb{N}^*$:

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}} = 1\ \underbrace{0...0}_{n \text{ zéros}} \qquad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}00 \cdots \times 0}_{n \text{ zéros}}1$$

Propriété : — Niveau *

Exemples :

$$10^2 = 100 \ ; \ 10^3 = 1000 \quad \text{et} \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01 \ ; \ 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$$

Bien pratique en physique ! — Niveau *

Les puissances de 10 donnent de nombreuses situations d'utilisation de ces notations.

— En chimie :
Le diamètre du noyau de l'atome d'hydrogène mesure 0,0000000000000024 m.
Il est clairement plus simple de l'écrire : $2{,}4 \times 10^{-15}$ m.

— En astronomie :
On estime la masse du soleil assez proche de 2000000000000000000000000000000 Kg.
Il est plus facile de manipuler cette donnée ainsi : 2×10^{30} Kg.

Les physiciens... — Niveau **

Dans leurs notations, les physiciens ont pris l'habitude de remplacer le symbole $\times$ par un .
Ils écrivent souvent $2{,}4 \ . \ 10^{-15}$ et $2 \ . \ 10^{30}$.

2. Les préfixes

Vocabulaire : **Niveau ***

Pour adapter les unités des grandeurs que l'on mesure, aux puissances de 10, les physiciens, chimistes, biologistes, économistes, .., ont souvent recours aux préfixes :

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Mega			kilo	hecto	déca		déci	centi	milli			micro

On pourra utiliser aussi : 10^9 pour **giga** noté G et 10^{12} pour **téra** noté T
ou pour l'infiniment petit : 10^{-9} pour **nano** noté n et 10^{-12} pour **pico** noté p

Exemple : **Niveau ***

Pour des tailles de fichiers par exemple :

5ko pour dire 53000 octets $= 5 \times 10^3$ octets.

5Mo pour dire 5000000 octets $= 5 \times 10^6$ octets.

5Go pour dire 5000000000 octets $= 5 \times 10^{12}$ octets.

5To pour dire 5000000000000 octets $= 5 \times 10^{15}$ octets.

3. Les erreurs classiques à éviter :

Le double n'est pas le carré ! **Niveau ***

$$3^2 = 3 \times 3 = 9 \qquad 3 \times 2 = 6$$

$$3^2 \neq 3 \times 2$$

Erreur classique de l'élève qui va trop vite et confond les opérations.

Attention au signe ! **Niveau ***

La puissance agit uniquement sur le nombre juste devant l'exposant ou entre parenthèses.

$$-2^2 = -(2)^2 = -(2 \times 2) = -4 \qquad (-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$$

Attention à cette confusion de signe très fréquente !

Priorité de la puissance ! **Niveau ***

La puissance est toujours prioritaire sur les 4 autres opérations de base.

$$2 \times 4^2 = 2 \times (4)^2 = 2 \times 16 = 32 \qquad (2 \times 4)^2 = 8^2 = 64$$

Donc :

$$2 \times 4^2 \neq (2 \times 4)^2$$

Priorité des parenthèses ! **Niveau ***

$$(5+3)^2 = 8^2 = 64 \qquad 5+3^2 = 5+(3)^2 = 5+9 = 14$$

Donc :

$$5+3^2 \neq (5+3)^{2!}$$

QCM n°2 :

III. Propriétés calculatoires :

1. Produit et quotient d'un même réel avec des exposants différentes.

Activité : **Niveau ***

Avec les définitions du cours, on a :

$$4^3 \times 4^7 = \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{4^3} \times \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{4^7} = 4^{7+3} = 4^{10}$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 4 par a :

$$a^3 \times a^7 = \underbrace{a \times a \times a}_{a^3} \times \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}_{a^7} = a^{7+3} = a^{10}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 3 par n :

$$a^n \times a^7 = \underbrace{a \times a \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}_{a^7} = a^{n+7}$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 7 par m :

$$a^n \times a^m = \underbrace{a \times a \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \ldots \times a}_{m \text{ fois}} = a^{n+m}$$

On peut faire la même activité avec un quotient.

Activité **Niveau ***

Avec les définitions du cours, on a : $\dfrac{4^3}{4^7} = \dfrac{\overbrace{4 \times 4 \times 4}^{4^3}}{\underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{4^7}} = \dfrac{1}{4 \times 4 \times 4 \times 4} = 4^{-4} = 4^{3-7}$

Propriété **Niveau ***

Soit $a \in \mathbb{R}^*$; $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Cours en vidéo :

Méthode n°1 : Utiliser une propriété avec les puissances : Niveau *

Stratégie :
On repère bien les opérations et priorités avant d'appliquer des formules.

Énoncé :
Calculer :

$A = 2^3 \times 2^5$

$B = \dfrac{7^3}{7^{-3}}$

Correction :

2. Puissances de puissances :

Activité **Niveau ***

Avec les définitions du cours, on a :

$$\left(4^3\right)^2 = 4^3 \times 4^3 = 4^{3+3} = 4^6 = 4^{3\times 2}$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 4 par a :

$$\left(a^3\right)^2 = a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^6 = a^{3\times 2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $m \in \mathbb{N}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 3 par n et 2 par m :

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \times \ldots \times a^n}_{m \text{ fois}} = a^{\overbrace{n + \ldots + n}^{m \text{ fois}}} = a^{n\times m}$$

Propriété **Niveau ****

Soit $a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Méthode n°2 : Utiliser une propriété avec les puissances : Niveau *

Stratégie :
On repère bien les opérations et priorités avant d'appliquer des formules.

Énoncé :
Calculer :

$A = (2^3)^5$

$B = (-2^{-4})^2$

Correction :

3. Même puissance de deux réels distincts :

Activité — **Niveau ***

Avec les définitions du cours, on a :

$$5^3 \times 2^3 = \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{5^3} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} = (5 \times 2) \times (5 \times 2) \times (5 \times 2) = (5 \times 2)^3 = 10^3$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 4 par a, 2 par b et 3 par n :

$$a^n \times b^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{b \times \ldots \times b}_{n \text{ fois}} = \underbrace{(a \times b) \ldots \times (a \times b)}_{n \text{ fois}} = (ab)^n$$

On a la même propriété avec le quotient.

Propriété — **Niveau ****

Soit $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n \times b^n = (ab)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Méthode n°3 : Utiliser une propriété avec les puissances : — Niveau *

Stratégie :
On repère bien les opérations et priorités avant d'appliquer des formules.

Énoncé :
Calculer :

$A = 2^3 \times 5^3$

$B = \dfrac{20^3}{5^3}$

Correction :

4. Les erreurs classiques à éviter :

Confondre les priorités : — **Niveau ****

$$10^2 + 10^3 \neq 10^5$$

Il n'y a pas de propriétés avec les sommes de puissances !

$$10^2 + 10^3 = 100 + 1000 = 1100 \qquad 10^5 = 100000$$

Outre l'erreur de calcul, l'ordre de grandeur des deux résultats est sensiblement différent.
Mettez donc du sens à vos calculs, analysez les opérations en présence, avant d'appliquer des propriétés dans des contextes où elles ne fonctionnent pas.

Mal appliquer les propriétés : **Niveau ****

$$3^2 \times 4^3 \neq 12^5$$

$$3^2 \times 4^3 = 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 576 \qquad 12^5 = 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 248832$$

Comme dans le cas précédent, le calcul de droite est bien supérieur à celui de gauche.
Imaginez que vous parliez en euros, l'ordre de grandeur est très différent !!

Comment s'y retrouver ? **Niveau ****

Pour appliquer les formules avec les puissances, il faut outre une multiplication, qu'un élément soit commun aux deux facteurs :

$$3^2 \times 3^4 = 3^6$$

Le nombre 3 est dans chaque facteur, on peut ajouter les exposants.

$$3^2 \times 4^2 = 12^2$$

L'exposant 2 est le même, il ne change pas,il ne change pas, on peut multiplier 3×2.

Applications :

Calculer le plus simplement, sans utiliser la calculatrice : Niveau *

$A = 2^3 \times 2^4 \qquad B = 10^3 \times 10^{-4} \qquad C = x^2 \times x^3 \qquad D = \left(2^3\right)^4$

Correction :

Applications :

Calculer le plus simplement, sans utiliser la calculatrice : Niveau *

$E = \left(10^3\right)^{-4} \qquad F = \left(x^2\right)^3 \qquad H = \dfrac{10^3}{10^{-2}} \qquad I = \dfrac{x^3}{x^1}$

Correction :

Applications :

Calculer le plus simplement, sans utiliser la calculatrice : Niveau **

$J = (5 \times 3)^2 \qquad K = 5^5 \times 2^5 \qquad L = (3x)^2 \qquad M = (-2x)^3$

Correction :

Méthode n°4 : Utiliser les propriétés des puissances : Niveau *

Stratégie :
Bien analyser le calcul, quitte à le détailler au brouillon pour lui donner du sens, avant d'appliquer une propriété trop rapidement.

Énoncé :
Simplifier les nombres suivants :

$A = 5^7 \times (5^3)^2$

$B = \dfrac{(-3)^5}{3^7 \times 3}$

Correction :

Méthode n°5 : Utiliser les propriétés des puissances : Niveau **

Stratégie :
Commencer par regrouper les facteurs communs ou en faire apparaître.

Énoncé :
Calculer A et B sous la forme d'un produit de puissances de 2, de 3 et de 5.

$A = \dfrac{5^8 \times 10^{-7} \times 3^9}{10^{-5} \times 3^7 \times 5^{10}}$

$B = \dfrac{(-6)^3 \times 15^4 \times (-16)^3}{25 \times 12^5}$

Correction :

Méthode n°6 : Utiliser les propriétés des puissances : Niveau ***

Stratégie :
Les mêmes propriétés s'appliquent au calcul littéral.

Énoncé :
Soient a et b deux réels non nuls, simplifier :

$C = \dfrac{ab^6}{(ab)^4}$

$D = \left(\dfrac{a^2}{a \times b^3}\right)^4 \times b$

Correction :

IV. Notation scientifique :

Activité Niveau *

S'il est pratique d'écrire des nombres avec les puissances de 10, il se pose un problème d'homogénéité de ces écritures :
Le nombre 321000 peut se noter par exemple :

$$321000 = 3210 \times 10^2 = 321 \times 10^3 = 32{,}1 \times 10^4 = 3{,}21 \times 10^5 = 0{,}321 \times 10^6$$

De même, le nombre 0,00345 peut s'écrire :

$$0{,}00345 = 345 \times 10^{-5} = 34{,}5 \times 10^{-4} = 3{,}45 \times 10^{-3} = 0{,}345 \times 10^{-2} = 345 \times 10^{-5}$$

On représente la situation dans ce tableau de numération exprimé en puissances de 10 :

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}
	3	2	1	0	0	0	

10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
	0,	0	0	3	4	5

1. Définitions

Définition pratique Niveau *

Pour s'accorder, et que chacun utilise la même écriture d'un même nombre, il a été décidé de définir une **notation scientifique**.
On choisit dans le tableau, la colonne du premier chiffre significatif et on l'écrit avec la puissance de 10 correspondante.

Illustration Niveau **

On écrira alors : $321000 = 3{,}21 \times 10^5$ et $0{,}00345 = 3{,}45 \times 10^{-3}$

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}
	3,	2	1	0	0	0	

10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
	0,	0	0	4	5	

Définition mathématique Niveau **

Écrire un nombre en notation scientifique c'est l'exprimer sous la forme

$$a \times 10^n \qquad \text{avec} 1 \leq a < 10 \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

Exemples **Niveau ***

$123 \times 10^4 = 1{,}23 \times 10^6$ et $45 \times 10^{-4} = 4{,}5 \times 10^{-3}$

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	2	3	0	0	0	0					
						0,	0	0	4	5	

Méthode n°7 : Écrire un nombre en notation scientifique :

Niveau **

Stratégie :
Le plus simple étant de s'aider du tableau, au moins dans sa tête.

Énoncé :

$A = 12100000$

$B = 0{,}000321$

$C = 0{,}000045 \times 10^{12}$

$D = 253000000 \times 10^{-3}$

Correction :

2. S'évaluer, se préparer à l'évaluation :

QCM n°3 Niveau *

Mathaléa 1 Niveau *

Mathaléa 2 Niveau *

Auto-évaluation fin de chapitre :

	0	1	2	3
Connaître-utiliser définition et notations d'une puissance.				
Utiliser les puissances de 10 et préfixes.				
Utiliser les propriétés des puissances				
Utiliser-Connaître la notation scientifique.				

0 : je ne sais pas faire, je ne comprends pas de quoi il s'agit.
1 : Je sais que j'ai du mal avec cette notion, je l'ai assez mal comprise ou oubliée.
2 : Je pense savoir faire.
3 : Je sais que je maîtrise cette notion.