GÉOMÉTRIE

9

Plan de travail : Fonction exponentielle

Nom : .... Prénom :................

Exercices types corrigés en vidéo :

1. Simplifier chaque expression :
a) $\dfrac{\left(e^{-2x}\right)^3 e^{4x}}{e^{-2x}}$
b) $\dfrac{\left(e^{1-0{,}5x}\right)^3}{e \times e^{-4{,}5x}}$
Correction en vidéo

2. Montrer que pour tout x réel :
$$\frac{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$$
Correction en vidéo

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $e^{2-x} = e^x$
b) $e^{2x+3} = 1$
c) $e^{5-x^2} = e$
d)$e^{-x} = 0$
e) $2e^{-x} = \dfrac{4}{e^x+1}$
f) $2e^{-x} = \dfrac{1}{e^x+1}$
Correction en vidéo

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $e^{2x} - e^{x+1} < 0$
b) $1 - e^{x-2} \geq 0$
c) $e^x - \dfrac{1}{e^x} \leq 0$
d) $\dfrac{1}{e^x} - e > 0$
Correction en vidéo

5. Démontrer que pour tout $x \in]-\infty, 0]$,

$$e^{5x} - 3 < 0$$

Correction en vidéo

6. Les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Donner leur fonction dérivée.
a) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x+4}$
b) $g(x) = \left(5x^2 - x\right)\mathrm{e}^{x}$
c) $h(x) = \left(5x^2 - x\right)\mathrm{e}^{-x}$

Correction en vidéo

7. On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (6-3x)\mathrm{e}^{2x}$$

Déterminer l'expression de la dérivée de f et en déduire son tableau de variations.

Correction en vidéo

8. On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x-1}}{x-2}$$

Déterminer le tableau de variations de f.

Correction en vidéo

OBJECTIFS DU CHAPITRE

Notion :	**Parcours 1** ☐	**Parcours 2** ☐	**Parcours 3** ☐
Propriétés calculatoires :	Exos 1 ; 2 ☐	Exos 1 ; 2 ☐	Exos 1 ; 2 ☐
Démontrer/calculer :	Exos 4 ☐	Exos 3 ; 4 ☐	Exos 3 ; 4 ; 5 ☐
Calcul de dérivées :	Exos 6 ☐	Exos 6 ☐	Exos 6 ☐
Résoudre des équations avec les exponentielles :	Exos 7 ; 8 ☐	Exos 7 à 9 ☐	Exos 7 à 11 ☐
Résoudre des inéquations avec les exponentielles	Exos 12 ☐	Exos 12 ☐	Exos 12 à 14 ☐
Calcul de dérivées de e^{u} :	nope	Exos 15 ☐	Exos15 ☐
Sujets E3C	Exos 16 ; 17 ; 19 ☐	Exos 16 à 22 ☐	Exos 16 à 23 ☐

Propriétés calculatoires.

1 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\exp(3) \times \exp(4)$

2) $\dfrac{\exp(-5)}{\exp(2)}$

3) $[\exp(5)]^3$

4) $\dfrac{1}{\exp(\,-1)}$

5) $\exp(-2) \times \exp(4)$

6) $\dfrac{\exp(5x+7) \times \exp(-x)}{\exp(2x+3)}$

2 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-4}$

2) $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{-5}\right)^2}{\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-6}}$

3) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$

4) $\left(\mathrm{e}^{3x+2}\right)^2$

5) $\mathrm{e}^{2x+1} \times \mathrm{e}^{-3x+5}$

6) $\dfrac{\mathrm{e}^{-x+1}}{\mathrm{e}^{3x-4}}$

7) $\dfrac{\mathrm{e}^{x-7}}{\mathrm{e}^{2x}} \times \dfrac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{-2x+1}}$

Démontrer/calculer

3 Montrer que pour tout réel x, on a

1) $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{x+1}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

2) $1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

3) $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$

4 Développer et simplifier les expressions suivantes :

1) $e^x\left(e^x+5\right)$

2) $\left(e^x+2\right)\left(e^x+5\right)$

3) $\left(e^x-2\right)^2$

4) $\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x-2\right)$

5) $\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^{-x}+3\right)$

6) $\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2$

7) $\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)$

8) $\left(\mathrm{e}^x+1\right)\left(2-\mathrm{e}^{-x}\right)$

9) $\left(\mathrm{e}^x-3\right)\left(\mathrm{e}^x+3\right)$

5 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1}$.
Démontrer que $f(x) + f(-x) = 2$

Calcul de dérivées

6 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2\mathrm{e}^x$

2) $g(x) = 2x + \mathrm{e}^x$

3) $i(x) = \left(x^2+3x+5\right)\mathrm{e}^x$.

4) $j(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

Résoudre des équations :

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\mathrm{e}^x = 1$ **2)** $\mathrm{e}^x = 0$ **3)** $e^x + 1 = 0$

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\mathrm{e}^{5x+1} = \mathrm{e}^{2x}$ **2)** $\mathrm{e}^{3x+1} = 1$ **3)** $\dfrac{e^{1-3x}}{e} = 1$

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(3x-5)\left(\mathrm{e}^x+2\right) = 0$ **2)** $4\mathrm{e}^{-x} + 7x\mathrm{e}^{-x} = 0$

10

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 + 6X - 7 = 0$

2) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

2) $e^{2x} + 4e^x + 3 = 0$

Résoudre des inéquations :

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\mathrm{e}^{2x-4} \geqslant 1$ **2)** $e^{x^2-3x+5} < \mathrm{e}$ **3)** $\left(\mathrm{e}^{3x+1}\right)^2 < 0$

13 Démontrer que pour tout réel x,
$2e^{2x} + e^x + 1 = (2e^x+1)(1-e^x)$
En déduire le signe de $2e^{2x} + e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

14 Étudier le signe de l'expression $(2x+6)e^{x^2+6x+2}$.

Calcul de dérivées de e^u

15 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $h(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$

2) $k(x) = \dfrac{x^2+x+1}{\mathrm{e}^x}$.

3) $l(x) = 10\mathrm{e}^{-0{,}5x+1}$.

4) $m(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-0{,}1x}$.

5) $n(x) = \mathrm{e}^{-x^2+x}$

Sujets E3C-QCM

16 L'inéquation $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ d'inconnue x a pour ensemble de solutions :

$\mathbb{R}$	$]0\,;+\infty[$	$]-\infty\,;0[$	$\varnothing$

17 Pour tout réel x, $\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2$ est égal à :

$e^{2x}-1$	$\mathrm{e}^{2x}+1$	$\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1$	$\mathrm{e}^{(x^2)}-1$

S'entraîner

18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{5x-1}$.
Pour tout réel x, $f'(x)$ est égal à :

e^{5x-1}	$5\mathrm{e}^{5x}$	$5\mathrm{e}^{5x-1}$	$5x\mathrm{e}^{5x-1}$

19

L'inéquation $-3\mathrm{e}^{x+2} > -3\mathrm{e}^{4}$ d'inconnue x, a pour ensemble de solutions :

$]-2\,;+\infty[$	$]2\,;+\infty[$	$]-\infty\,;2[$	$]-\infty\,;-2[$

20

$\dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{2x-2}} =$

e^{3x+2}	e^{3x-2}	$\mathrm{e}^{2,5x-2,5}$	e^{7x-2}

21

Pour tout réel x, $\dfrac{(\mathrm{e}^{x})^2}{\mathrm{e}^{-x}}$ est égal à :

e^{x^2+x}	e^{3x}	e^{2}	e^{-2}.

22 Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :
$R(x) = (5x-30)\mathrm{e}^{-0{,}25x}$, pour tout réel $x \in [2\,;20]$.

1) Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.

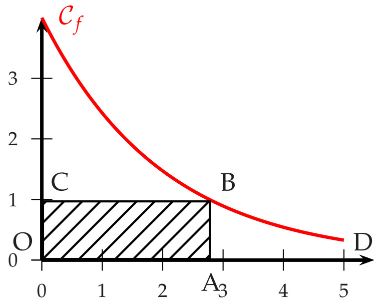
2) Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).

3) Résoudre l'inéquation $R(x) \geqslant 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

4) On note R' la dérivée de la fonction R.
Un logiciel de calcul formel donne : $R'(x) = (-1{,}25x + 12{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}25x}$.
En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

23 Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.

Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 5$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = 4\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.



L'enclos est représenté par le rectangle $OABC$ où O est l'origine du repère et B un point de $\mathcal{C}_f$, A et C étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées $(5\,;0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point A sur le segment $[OD]$ permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.

1) Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2, est donnée en fonction de x par $g(x) = 4x\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ pour x dans l'intervalle $[0\,;5]$.

2) La fonction g est dérivable sur $[0\,;5]$. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;5]$, on a $g'(x) = (4-2x)\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.

3) En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;5]$.

4) Où doit-on placer le point A sur $[OD]$ pour obtenir une superficie d'enclos maximale ?
Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm^2.

Accès aux corrigés

SOLUTIONS

Chapitre G9

Plan de travail : Fonction exponentielle

S'entraîner

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23