Évaluation de mathématiques :

Généralités sur les suites numériques

Exercice 1 (2 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On peut trouver v_1 en utilisant la formule de récurrence : $v_1 = 2v_0 - 3 = 2 \times (-2) - 3 = -7$.
   Puis on peut trouver v_2 de la même manière : $v_2 = 2v_1 - 3 = 2 \times (-7) - 3 = -17$.
   Ainsi, $v_2 = -17$.
2. $w_{n+1} = -2(n+1)^2 - 3 = -2n^2 - 4n - 2 - 3 = -2n^2 - 4n - 5$

Exercice 2 (3 points)

1. Montrer que $u_{n+1} - u_n = 2n - 1$. On a :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 2(n+1) - n^2 + 2n \\ &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - n^2 + 2n \\ &= 2n - 1. \end{aligned}$$
   Donc, on a bien $u_{n+1} - u_n = 2n - 1$.
2. Que peut-on dire de la monotonie de la suite (u_n) sur N ? Justifier.
   On a $u_{n+1} - u_n = 2n - 1 > 0$ pour tout entier naturel n, donc la suite (u_n) est strictement croissante sur N.

Exercice 3 (3 points)

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = n^2 - n - 2$. Calculons $u_{n+1} - u_n$:
$$u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - (n+1) - 2] - (n^2 - n - 2) \quad = n^2 + 2n + 1 - n - 2 - n^2 + n + 2 \ = 2n - 1$$
   Ainsi, on a $u_{n+1} - u_n = 2n - 1$. Comme le coefficient de n est positif, la suite (u_n) est strictement croissante.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 \times \frac{2^n}{3^n}$. On a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{5 \times \frac{2^n}{3^n}} = \frac{2}{3}.$$
   Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$, ce qui montre que (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 4 (2 points)

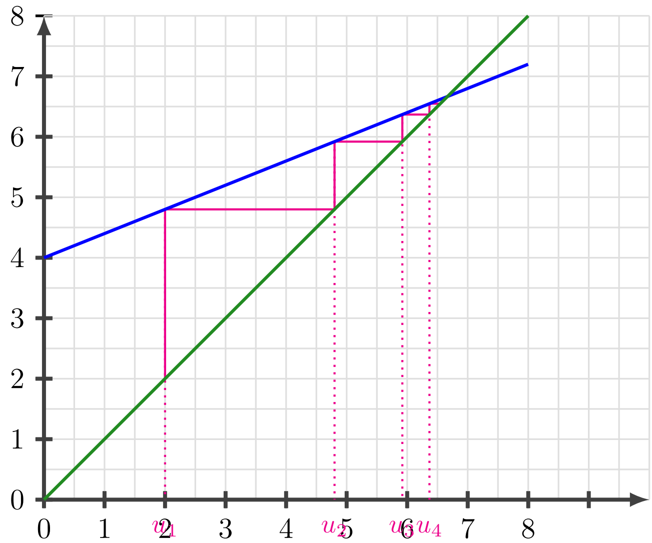
Au début du programme, on initialise U à 2 et n à 0. Ensuite, on entre dans la boucle "Tant que" et on multiplie U par 4 à chaque itération jusqu'à ce que U dépasse 90. En fin de programme, U vaut 128 et n vaut 4.

Exercice 5 (3 points)

On donne la suite (u_n) définie pour tout $n \in N$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5} \times u_n + 4 \end{cases}$$
On a tracé dans le repère ci-contre :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{5}x + 4$,
- la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

Représenter graphiquement, en laissant des traits de constructions, les 4 premiers termes de la suite (u_n).
Conjecturer la limite de la suite (un).



Exercice 6 (3 points)

1. La suite (u_n) est arithmétique avec $r = -4$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (-2-4(n+1)) - (-2-4n) = -4$.
2. La suite (v_n) n'est pas arithmétique car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 1 - n^2 - 1 = 2n + 1$ qui n'est pas constante.

Exercice 7 (4 points)

1. La formule générale de la suite arithmétique est $u_n = u_0 + nr$, donc $u_n = 3 - 2n$.
2. Pour $n = 10$, on a $u_{10} = 3 - 2 \times 10 = -17$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = (3-0) + (3-2) + \cdots + (3-18) = 10 \times 3 - 2 \times \frac{9 \times 10}{2} = -85$.