Correction Évaluation de mathématiques :

Exercice 1 (2 points)

1. $v_2 = 40$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= 3(n+1)^2 + 4 - \left(3n^2 + 4\right) && \text{bien poser son énoncé} \\ &3(n^2+2n+1)^2 + 4 - 3n^2 - 4 && \text{Attention priorité au carré et attention signe -} \\ &= 3n^2 + 6n + 7 \end{aligned}$$

Exercice 2 (3 points)

1. On commence par calculer

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(n+1)^2 - (n+1) && \text{Attention à bien remplacer tous les "n" par "n+1"} \\ &= 2(n^2+2n+1) - n - 1 && \text{Attention priorité au carré et attention signe -} \\ &= 2n^2 + 3n + 1 && \text{il est plus facile de procéder en deux étapes si vous n'êtes pas à l'aise en calcul.} \end{aligned}$$

Puis, on calcule

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2n^2 + 3n + 1 - \left(2n^2 - n\right) && \text{Attention au "-" devant la parenthès} \\ &2n^2 + 3n + 1 - 2n^2 + n \\ &= 4n + 1 && \text{Vous connaissez le résultat. herchez l'erreur si vous ne tombez pas dessus} \end{aligned}$$

2. On sait d'après le cours que les variations d'une suite dépendent du signe $u_{n+1} - u_n$:
On vient de montrer $u_{n+1} - u_n = 4n + 1 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
D'après le cours, (u_n) est une suite croissante.

Exercice 3 (3 points)

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$
Soit f la fonction vérifiant, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$
On a alors, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$
On étudie les variations de f, pour cela, on va calculer la dérivée de f et étudier son signe :
On reconnaît $f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
On obtient (calcul non fait ici) : $f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2}$
On a clairement $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc f est strictement croissante.
Par application d'une propriété de cours sur les fonctions associées, on en déduit que (u_n) est elle aussi croissante.
2. $\forall n \in \mathrm{N}^*, u_n = \dfrac{2^n}{n}$
On observe que $\forall n \in \mathrm{N}^*, u_n = \dfrac{2^n}{n} \geqslant 0$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule d'abord $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$.

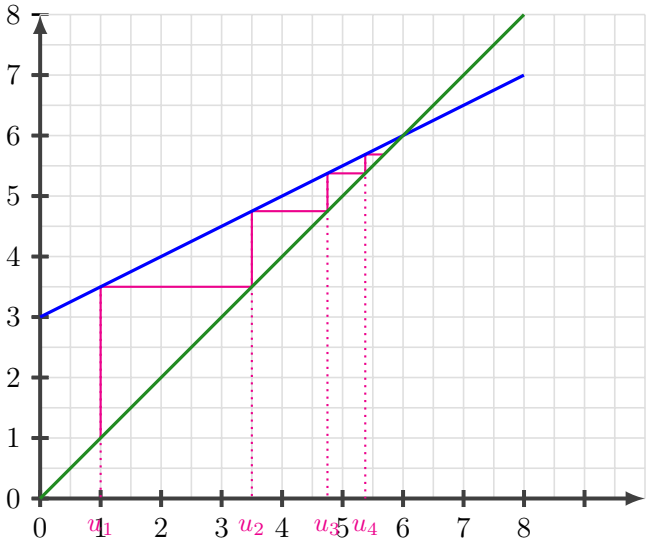
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n}{n+1} \\ &= 2 \times \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{2n}{n+1}\end{aligned}$$

Comme $2n > n+1 \iff n > 1$, on en déduit que $\forall n \in \mathrm{N}^* \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
D'après le cours, on sait que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 4 (2 points)

U	n	remarque
3	0	
9	1	
27	2	
81	3	

Exercice 5 (3 points)



Graphiquement, on conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

Exercice 6 (3 points)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,$u_n = 2 + 4n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 2 + 4(n+1) - (2+4n) \\ &= 2 + 4n + 4 - 2 - 4n \\ &= 4\end{aligned}$$

   On peut conclure qu'il existe un réel $r = 4$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$
   (u_n) est donc bien une suite arithmétique.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,$v_n = 2n^2 - 1$. On calcule $u_0 = -1$ $u_1 = 1$ $u_2 = 7$
   On calcule $u_1 - u_0 = 0$ $u_2 - u_1 = 6$
   On observe que $u_1 - u_0 \neq_2 -u_1$ donc on peut conclure que la suite n'est pas arithmétique.

Exercice 7 (4 points)

Soit (u_n) une suite arithmétique, de premier terme $u_0 = -2$ et de raison 3.

1. On sait que (u_n) est une suite arithmétique, de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = 3$.
   D'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$
   En appliquant le cours, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -2 + 3n$
2. Le $20^{\text{ème}}$ terme est donc $u19$:
   On applique la formule de cours, et on obtient $u_{19} = -2 + 3 \times 19 = 55$
3. Calculer $\sum_{k=0}^{19} u_k$
   On sait d'après le cours que, pour une suite arithmétique, on peut calculer la somme de ses premiers termes avec la relation :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{Dernier terme} - Pemierterme}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{19} u_k = 20 \times \frac{55 - 2}{2} = 530$$