GÉOMÉTRIE

9

Fonction exponentielle

ACTIVITÉ 1

Pour répondre à des problèmes physiques, on est amené à chercher s'il existe une ou des fonction(s) qui soient égales à sa(leur) dérivée.
On cherche des fonctions f qui vérifient pour tout tout x réel,

$$f(x) = f'(x) \text{ que l'on note plus simplement : } \quad f = f'$$

.

Podcast

L'ensemble du cours en vidéo.

DÉFINITION : Équation différentielle

L'équation $f = f'$ est une égalité dont l'inconnue est une fonction.
C'est un type d'équations particulières, très différentes des équations classiques où l'inconnue est une variable.
On appelle **équation différentielle** cette famille d'équations dont l'inconnue est une fonction.

REMARQUE :
L'étude approfondie de la résolution des équations différentielles est du programme de Terminale. Ce n'est pas l'objet de ce chapitre.
L'idée ici est uniquement de résoudre une équation différentielle particulière : $f = f'$ pour répondre à un problème des physiciens.

A. Solution évidente de de l'équation $f = f'$:

La première idée qu'on peut avoir pour trouver une solution à cette équation est la fonction qui vaut, pour tout x réel, $f(x) = 0$.
La fonction nulle vérifie évidemment aussi $f'(x) = 0$.
On a donc trouvé une solution à l'équation $f = f'$, c'est la fonction nulle.

B. Ajout d'une condition initiale :

Pour éviter cette situation sans grand intérêt, qui ne satisfait pas les physiciens, nos amis ra-

joutent ce qu'ils appellent **une condition initiale** :
existe-t-il une fonction f qui vérifie $f = f'$ pour tout x réel, et qui vérifie aussi $f(0) = 1$.
L'intérêt de rajouter $f(0) = 1$ c'est que la fonction nulle solution, solution triviale que nous avions obtenue, ne vérifie pas cette condition initiale.

C. Recherche de solution(s) de de l'équation $f = f'$ avec condition initiale :

On cherche alors d'autres fonctions qui vérifient ces deux conditions :
On peut chercher dans les fonctions de références (carré, cube, inverse, racine carrée, affine, trigonométriques, ...), on ne trouve aucune fonction qui vérifie ces conditions, à part la fonction nulle.

D. Fonction solution de de l'équation $f = f'$ avec condition initiale :

On va finalement supposer qu'il existe une unique fonction qui vérifie ces conditions.
L'objet de ce chapitre est de d'étudier cette fonction qui vérifie.
On se "contentera" dans ce chapitre, de prouver son unicité puis d'étudier ses propriétés.

1. Découverte de la fonction exponentielle :

Podcast

A. Définition de la fonction exponentielle :

PROPRIÉTÉ

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

PREUVE

La démonstration qui suit est intéressante pour les élèves à l'aise en mathématiques et qui veulent pousser le niveau d'exigence. Que ceux qui ont du mal se contentent de la définition.
Elle est consultable en pdf en ligne en cliquant sur le QR code.

Démonstration en vidéo

DÉFINITION

Comme cette fonction précédemment définie est unique, on lui donne un nom : **fonction exponentielle**. On la note exp.
On a donc, pour tout réel x,

$$\exp'(x) = \exp(x) \text{ et en particulier : } \exp(0) = 1$$

B. Première propriété de la fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel $x, \exp(x) \neq 0$.

PREUVE On a démontré ce résultat dans la démonstration précédente.

PROPRIÉTÉ

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)}$

PREUVE On a montré dans la première démonstration que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \quad \text{et} \quad \exp(x) \neq 0$
Il en résulte que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)}$

Exemple
$$\exp(3) = \frac{1}{\exp(-3)} \quad \text{et} \quad \exp(-2) = \frac{1}{\exp(2)}$$

C. Relation fonctionnelle :

PROPRIÉTÉ : Relation fondamentale

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Démonstration en vidéo

Exemple
$\exp(5+7) = \exp(5) \times \exp(7)$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x+2) = \exp(2) \times \exp(x)$

PREUVE Soit $y \in \mathbb{R}$. On définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x+y)$.
Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times 1 \times \exp(x+y) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x+y) = h(x)$.
On a montré que sur $\mathbb{R}$, on a $h(x) = h'(x)$.
De plus $h(0) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(0+y) = 1$.
On déduit des points précédents que h est exactement la fonction exponentielle,
Pour tout entier x, on a $h(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x+y) = \exp(x)$
Ce qui est équivalent à dire que : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$, pour tous réels x et y.
Ce qui démontre la propriété.

REMARQUE : On dit que la fonction exponentielle transforme une somme en un produit.

$$\exp(\underbrace{3+4}_{\text{somme}}) = \underbrace{\exp(3) \times \exp(4)}_{\text{produit}}$$

MÉTHODE 1 Appliquer la relation fonctionnelle

Exercice d'application

Simplifier : $\exp(3) \times \exp -4 \times \exp 2$

Correction

D. Signe de l'exponentielle

■ PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Podcast

PREUVE Pour tout nombre réel x, d'après la relation fonctionnelle, on a :
$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0.$
En effet, un carré est toujours positif ou nul.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geqslant 0$.
Or la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc pour tout nombre réel x, $\exp(x) > 0$.

E. Propriétés algébriques de la fonction exp

■ PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Démonstration en vidéo

Exemple

$\exp(5-7) = \dfrac{\exp(5)}{\exp(7)}$, et pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x-2) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(2)}$

PREUVE Pour tous nombres réels x et y, :
$\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y)$ d'après la relation fonctionnelle.
Or $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$ d'après la propriété de la fonction exponentielle vue en début de cours,
donc $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

■ PROPRIÉTÉ : **Généralisation :**

On peut généraliser la relation fonctionnelle à plus de deux termes :
Pour tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

$$\exp(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \ldots \times \exp(x_n)$$

■ PROPRIÉTÉ

Pour tous nombre réel x et tout nombre entier relatif n,

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n$$

.

Exemple

$\exp(5\times 3) = \exp(5)^3 = \exp(3)^5$, et pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(2x) = \exp(x)^2$

PREUVE

- Lorsque $n > 0$, on obtient l'égalité en appliquant la propriété précédente dans le cas particulier où $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$.
- Lorsque $n = 0$, l'égalité est vérifiée car $\exp(0) = 1$.
- Lorsque $n < 0, \exp(nx) = \exp((-n)(-x))$.

  Or $-n > 0$ donc d'après le premier cas, $\exp(nx) = (\exp(-x))^{-n}$.

  Donc $\exp(nx) = (\exp(-x))^{-n} = \left(\dfrac{1}{\exp(x)}\right)^{-n} = (\exp(x))^n$

REMARQUE : On peut retenir que l'exponentielle transforme le **produit** en **puissances**.

F. S'évaluer

QCM n°1

G. Notation e

DÉFINITION

On note e l'image de 1 par la fonction exp.

Ainsi, $\exp(1) = \mathrm{e}$

Ce nombre e est appelé **constante de Neper** ou **nombre d'Euler**.

Podcast

REMARQUE : Le nombre e est irrationnel et vaut approximativement $\mathrm{e} \approx 2,718$.

PROPRIÉTÉ

Pour tout nombre réel x, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ (lire e exposant x)

PREUVE Pour tout nombre entier relatif n, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.
Par extension, on peut noter, pour tout nombre réel x, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$
On définit ainsi n'importe quelle puissance RÉELLE du nombre e.

NOTATION : On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$.

H. Nouvelles écritures des propriétés :

PROPRIÉTÉ : Valeurs remarquables :

$$\mathrm{e}^0 = 1 \qquad \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

PROPRIÉTÉ : Propriétés admises :

Pour tous nombres réels x et y et tout nombre entier relatif n, on a :

- $\mathrm{e}^x > 0$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
- $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$

Exemple

Simplifier les nombres suivants :

- $e^3 \times e^4 = e^{3+4} = e^7$
- $e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$
- $\left(e^{1,5}\right)^4 = e^{1,5\times 4} = e^6$
- $\left(e^x\right)^4 = e^{4\times x} = e^{4x}$

MÉTHODE 2 Calculer avec des exponentielles.

On utilise les propriétés de calcul sur les puissances entières d'un réel vues au collège.

Exercice d'application

- $A(x) = e^3 \times e^{-4} \times e^2$
- $B(x) = \dfrac{e^{-3}}{e^2}$
- $C(x) = \dfrac{e^2 \times e^4}{e}$
- $D(x) = \left(e^{3x}\right)^2$
- $E(x) = e \times \left(e^x\right)^{-4}$
- $F(x) = \dfrac{e^{-1} \times e^{-2}}{\left(e^2\right)^{-2} \times e^{-x}}$

Correction

I. Travailler seul :

Calculer : $e^5 \times e^{-1}$ et $\dfrac{e^{-1} \times e^4}{e^2}$

Correction en vidéo

Calculer : $\left(e^{-x}+1\right)^2$ et $\left(e^{-x}+e^x\right)^2$

Correction en vidéo

Simplifier les expressions suivantes où x est un réel quelconque :

$A = \dfrac{e^{1+x}}{e^{x+2}}$ $\quad B = \dfrac{e^{3x}+e^x}{e^{2x}+e^x}$ $\quad C = \left(\dfrac{e}{e^{-x}}\right)^4$

Correction en vidéo

J. S'évaluer

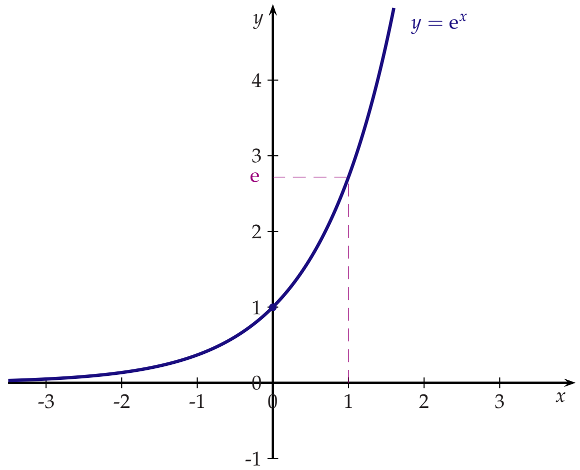
QCM n°2

2. Étude de la fonction exponentielle

Podcast

A. Représentation graphique

On peut utiliser un logiciel de géométrie ou une calculatrice pour obtenir la représentation graphique de la fonction exponentielle.



On vérifie que la fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$ mais que les images sont strictement positives.

B. Sens de variation de la fonction exp

PROPRIÉTÉ : Variations :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		
$f(x)$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

PREUVE La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.
Or pour tout nombre réel $x, \exp(x) > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

C. Dérivée de l'exponentielle

PROPRIÉTÉ

Par définition, on a choisi la fonction exponentielle pour qu'elle soit égale à sa dérivée.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(e^x)' = e^x$$

On ne peut pas faire plus simple !!

Preuve en vidéo

MÉTHODE 3 **Calculs de dérivées :**

Exercice d'application

Les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Donner leur fonction dérivée.

$f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$

$g(x) = \dfrac{e^x + 1}{4}$

$h(x) = \dfrac{4}{e^x}$

Correction

D. Travailler seul :

Calculer la dérivée de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-e^x + 1)(e^x + 3)$

Correction en vidéo

E. Dérivée de e^u

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable sur I.
Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = e^u$ est dérivable et on a :

$$f = u'e^u$$

Exemple

Calculer la dérivée de la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = e^{x^2}$
On appelle $u(x) = x^2$.
u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $u'(x) = 2x$.
En application de la propriété, $f'(x) = 2xe^{x^2}$.

F. Travailler seul/S'évaluer :

Calculer la dérivée de $f(x) = e^{-x}$

Correction en vidéo

QCM n°3

3. Résolution d'équations et d'inéquations :

A. Résoudre des équations avec les exponentielles

Podcast

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels a et b : $e^a = e^b \iff a = b$

REMARQUE :
Cette propriété peut sembler triviale mais il n'en est rien. Par exemple, elle n'est pas vérifie pour la fonction carrée :
$(-3)^2 = 3^2$ mais on a pourtant $-3 \neq 3$
Pour tous nombres réels a et b, on a donc $a^2 = b^2$ n'est pas équivalent à $a = b$
Cette propriété vérifiée par la fonction exponentielle est liée à la monotonie sur $\mathbb{R}$ de cette fonction.

MÉTHODE 4 Résoudre des équations avec des exponentielles.

Résoudre $e^{x+1} = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- L'idée est de transformer l'équation en une égalité entre deux images de la fonction exponentielle $e^a = e^b$.
  Dans notre cas, c'est facile : $e^{x+1} = 1 \iff e^{x+1} = e^0$
- On utilise alors la propriété précédente : $e^a = e^b \iff a = b$.
  Cette propriété permet de se « *débarrasser* » de l'exponentielle et de se ramener à une équation classique que l'on peut résoudre.
  $e^{x+1} = e^0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2e^{-2x+1} - 2e = 0$.

Correction

B. S'entraîner seul :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{-4x} - 1 = 0$.

Correction
en vidéo

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{2x} = \frac{1}{e}$.

Correction
en vidéo

C. Résoudre des inéquations avec les exponentielles

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels a et b : $e^a < e^b \iff a < b$

MÉTHODE 5

On utilise la même méthode vue précédemment que pour les équations.

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{1-3x} < e^{2x-3}$

Correction

D. S'entraîner seul/ S'évaluer :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{2x-1} > 1$.

Correction
en vidéo

QCM n°3

E. Changement de variables

MÉTHODE 6

Il est parfois nécessaire de changer de variable pour procéder en deux étapes successives lors de la résolution.
C'est une technique très classique en mathématiques, qu'il faut absolument connaître si vous poursuivez dans la matière.

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{2x} + 2e^{x} - 3 \leqslant 0$

Correction

F. Études de signes

MÉTHODE 7

Exercice d'application

Déterminer le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - e^{-x}$

Correction

G. Travailler seul

Déterminer le signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$1 - \mathrm{e}^{x}$ $\quad$ $\mathrm{e}^{2x} - 1$ $\quad$ $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x+1}$ $\quad$ $\mathrm{e}^{\left(x^2\right)} - \mathrm{e}^{x}$ $\quad$ $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$

Correction en vidéo

4. Étude complète d'une fonction exponentielle

MÉTHODE 8

Exercice d'application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-3x+4}$.

1) Déterminer une expression de la dérivée de f.
2) Étudier le signe de $f'(x)$.
3) Étudier les variations de f.

Correction