

Plan de travail : Vecteurs sans coordonnées

GÉOMÉTRIE

18

Nom :

Prénom :



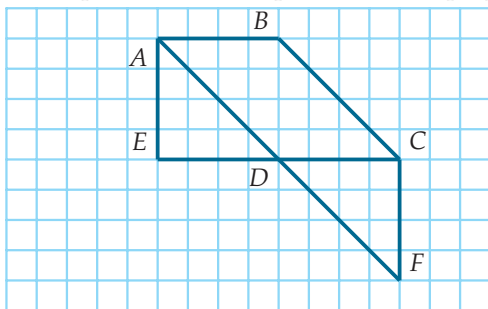
OBJECTIFS DU CHAPITRE

Notion :	Parcours 1 ☐	Parcours 2 ☐	Parcours 3 ☐
Définition d'un vecteur	Exo 3 ☐	Exos 2 ; 3 ☐	Exos 1 ; 2 ; 3 ☐
Translations vectorielles.	Exos 4 ☐	Exos 4 ; 5 ☐	Exos 4 ; 5 ☐
Egalités de cours avec les vecteurs.	Exos 6 ; 8 ☐	Exos 6 à 8 ☐	Exos 6 à 8 ☐
Opérations avec les vecteurs.	Exos 9 à 12 ☐	Exos 9 à 14 ☐	Exos 9 ; 12 à 16 ☐
Relation de Chasles.	Non demandé	Exo 17 ☐	Exos 17 et 18 ☐



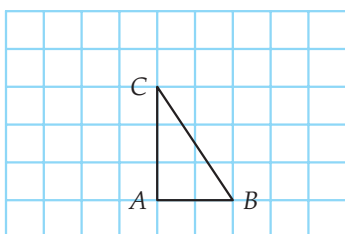
Définition d'un vecteur

1 Dans cette figure, où $ABDE$ est un carré et où $ACFE$ est un parallélogramme, cocher dans le tableau les couples de vecteurs qui vérifient les propriétés :

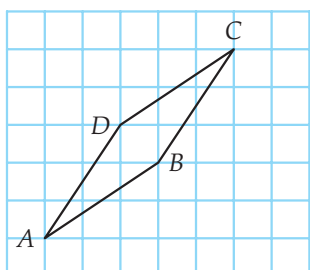


	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DF}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CF}$
Même direction	☐	☐	☐	☐
Même sens	☐	☐	☐	☐
Même norme	☐	☐	☐	☐
Egaux	☐	☐	☐	☐
Opposés	☐	☐	☐	☐

2 On donne un triangle ABC rectangle en A . Construire le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{BC}$.



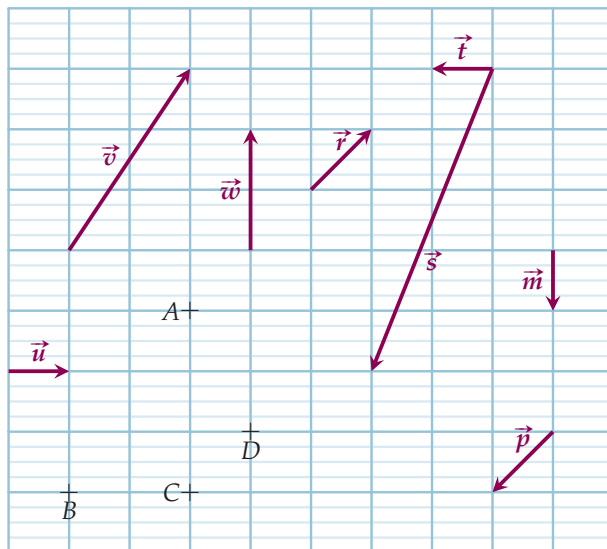
3 $ABCD$ est un losange. Construire le représentant d'extrémité C de $\overrightarrow{BD}$.



4 À partir de la figure ci-dessous, citer un vecteur :

- 1) opposé à $\overrightarrow{CD}$;
- 2) de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$;

- 3) de même direction que $\overrightarrow{BC}$ mais de sens contraire;
- 4) égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$.

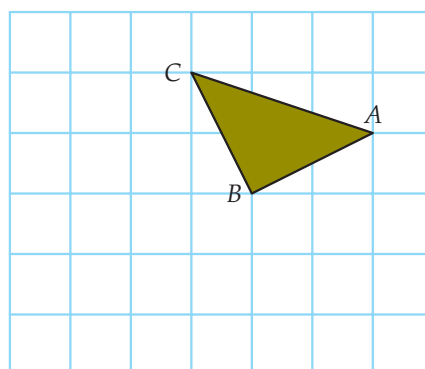


5 Placer deux points A et B et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- 1) Construire un vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$.
- 2) Construire un vecteur de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et qui n'est pas égal à $\overrightarrow{AB}$.
- 3) Construire un vecteur de même direction que $\overrightarrow{AB}$ mais de sens contraire et qui n'est pas égal à $\overrightarrow{BA}$.

Translations :

6 À partir de la figure ci-dessous, construire le translaté du triangle ABC dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



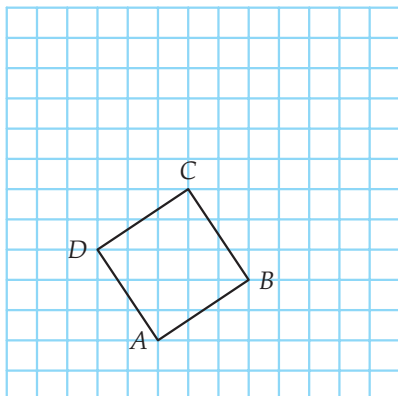
7 $ABCD$ est un carré de centre O .

Construire l'image de ce carré par

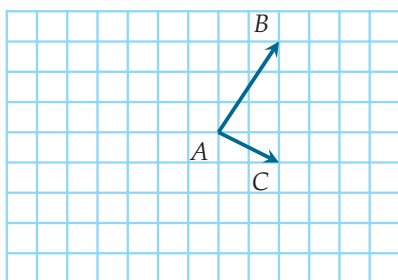
- 1) la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;



- 2) la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;
- 3) la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.



- 8 On considère les trois points A, B et C dans la figure ci-dessous.

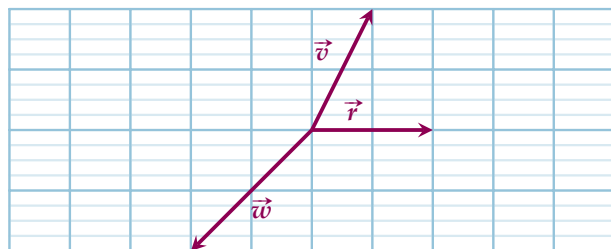


- 1) Construire le point D tel que A soit son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
- 2) Construire le point E tel que A soit son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- 3) Démontrer que le quadrilatère $BCED$ est un parallélogramme.

Opérations avec les vecteurs.

- 9 Construire les vecteurs suivants :

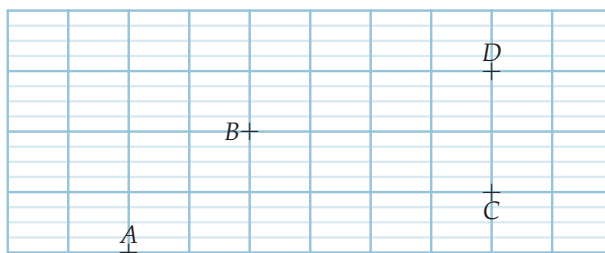
- 1) $\vec{w} + \vec{r}$
- 2) $\vec{r} + \vec{v}$
- 3) $\vec{v} + \vec{w}$



- 10 Construire les vecteurs suivants :

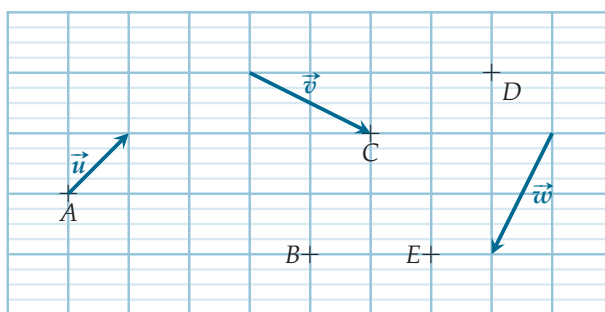
1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$



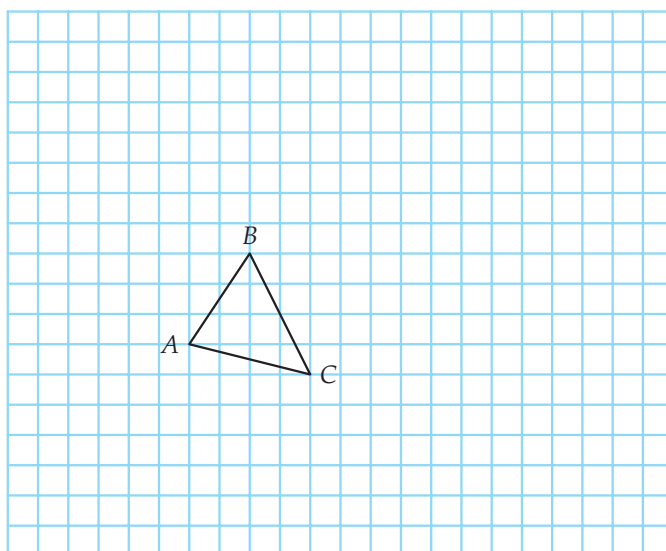
- 11 Construire un représentant des vecteurs suivants.

- 1) $\overrightarrow{AB} - \vec{u}$
- 2) $\vec{v} - \overrightarrow{CB}$
- 3) $-\vec{w} + \overrightarrow{DE}$



- 12

ABC est un triangle.



Placer les points M, N, P et R définis par :

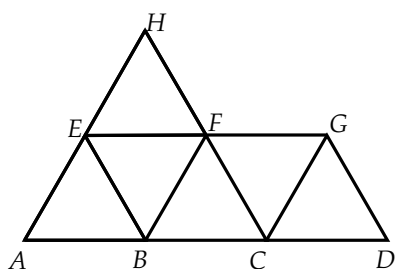
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} & \overrightarrow{BN} &= 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} & \overrightarrow{CR} &= 3\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Relation de Chasles :

13 Tous les triangles tracés sur la figure ci-dessous sont équilatéraux.

Remplacer les sommes vectorielles suivantes par un vecteur unique.

- 1) $\vec{CE} + \vec{AC}$.
- 2) $\vec{EF} - \vec{FC}$.
- 3) $-\vec{BA} + \vec{AC}$.
- 4) $\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{BC}$.



14 Écrire le plus simplement possible.

- 1) $\vec{MB} - \vec{MD}$
- 2) $\vec{CB} - \vec{CD} - \vec{BD}$
- 3) $\vec{BD} - \vec{BA} + \vec{MA} - \vec{MD}$
- 4) $\vec{BD} - \vec{MC} - \vec{BM} + \vec{DB}$
- 5) $\vec{MA} + \vec{EM} - \vec{CA} - \vec{EC}$
- 6) $-\vec{AU} + \vec{SH} - \vec{ST} + \vec{MU}$

15 Soit A, B, C, E et F cinq points du plan.

Démontrer les égalités suivantes :

- 1) $\vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CA} = \vec{0}$.
- 2) $\vec{BE} - \vec{AE} = \vec{BA}$.
- 3) $2\vec{AF} + \vec{FB} = \vec{AB} + \vec{AF}$.

Vecteurs colinéaires

16 Soit A, B et C trois points du plan.

On considère le vecteur :

$$\vec{u} = \frac{5}{2}\vec{AB} + \vec{AC} + 4\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

Démontrer, sans faire de figure, que le vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\vec{BC}$.

17 Soient $\vec{u} = \vec{AC} + \vec{BA} + 2\vec{CB}$

et $\vec{v} = 2\vec{AC} - \vec{CB} + \vec{BA} - \vec{AB}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

Démontrer avec les vecteurs :

18 ABC est un triangle.

D et E sont les points tels que :

$$\vec{EB} = \vec{BA} \text{ et } \vec{ED} = 2\vec{BC}$$

Démontrer que C est le milieu du segment $[AD]$.

19 $ABCD$ est un quadrilatère tel que $\vec{AB} = 2\vec{CD}$.

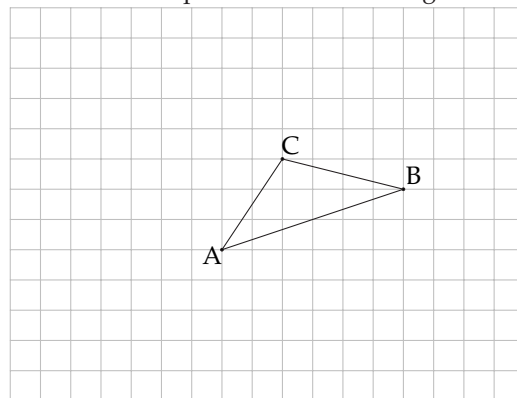
Soit E le symétrique de A par rapport à C .

Démontrer que E est le symétrique de B par rapport à D .

20 Soit ABC un triangle quelconque et D le point vérifiant la relation vectorielle :

$$\vec{AD} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$$

1) Construire le point D dans la figure ci-contre.



2) a) Exprimer le vecteur $\vec{BC}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

b) Montrer que $\vec{BD} = -2\vec{AB} + 2\vec{AC}$.

3) En déduire que les points B, C et D sont alignés.



Accès aux corrigés

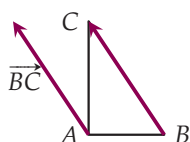
SOLUTIONS

Chapitre G18

Plan de travail : Vecteurs sans coordonnées

S'entraîner

	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DF}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CF}$
Même direction	O	N	O	O
Même sens	O	N	N	O
Même norme	N	O	O	O
Egaux	N	N	N	O
Opposés	N	N	O	N



1

2

3

4

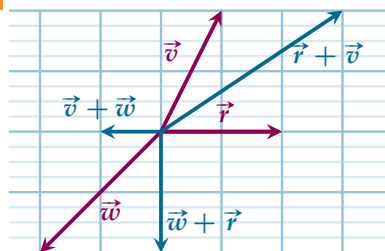
5

6

7

8

9



10

11

12

13

14

15

16

$$\begin{aligned}
 \vec{u} &= \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
 &= \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
 &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\
 &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\
 &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\
 &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\vec{u}$ est bien colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Explications :

L'idée est de simplifier l'écriture du vecteur $\vec{u}$ pour réussir à l'écrire en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Je sais c'est pas évident mais il faut y arriver.

17

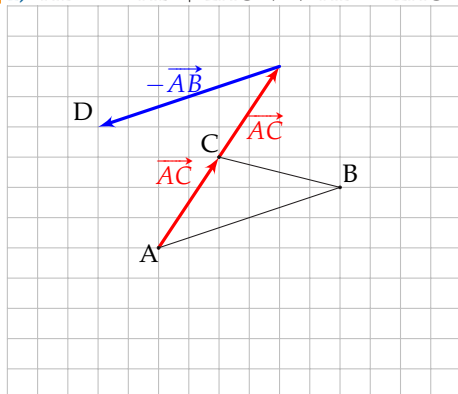
$$\begin{aligned}
 \vec{u} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB} \\
 &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \\
 &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} \\
 &= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB} \\
 &= 2\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \\
 &= 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \\
 &= 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} \\
 &= -3(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \\
 &= -3\vec{u}
 \end{aligned}$$

Explications :

L'idée est de simplifier les écritures des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ afin de les écrire en fonction des mêmes vecteurs (ici, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$). Par conséquent $\vec{v} = -3\vec{u}$ et donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires.

20 1) $\vec{AD} = -\vec{AB} + 2\vec{AC} \iff \vec{AD} = 2\vec{AC} - \vec{AB}.$



2) a) $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC}.$
b)

$$\begin{aligned}\vec{BD} &= \vec{BA} + \vec{AD} \\ &= -\vec{AB} - \vec{AB} + 2\vec{AC} \\ &= -2\vec{AB} + 2\vec{AC}\end{aligned}$$

1) On déduit des deux égalités vectorielles précédentes que :

$$\begin{aligned}\vec{BD} &= -2\vec{AB} + 2\vec{AC} \\ &= 2 \left(\underbrace{-\vec{AB} + \vec{AC}}_{=\vec{BC}} \right) \\ &= 2\vec{BC}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{BD}$ sont donc colinéaires car il existe un réel k (ici $k = 2$) tel que $\vec{BD} = k\vec{BC}$.

Les points B , C et D sont alignés.

On en déduit même que le point C est le milieu du segment $[BD]$ car $\vec{BD} = 2\vec{BC}$.