

Les vecteurs sans coordonnées

1. Introduction à la notion de Vecteurs :

RAPPELS :

En physique, on est amené à étudier les forces.

La Terre exerce par exemple une force gravitationnelle sur chaque masse présente, sur et autour de la Terre.

Vous avez déjà vu en physique, que pour matérialiser une telle force, on utilise des vecteurs, schématisés par des flèches.

L'objet de ce cours est d'apporter des outils mathématiques et de la rigueur autour de cette notion de vecteur utilisée par les physiciens.



Podcast

DÉFINITION : Vecteur :

Un vecteur est un objet mathématique qui se définit par

- par une direction,
- par une longueur, qu'on appelle "norme" ou encore "module",
- par un sens.

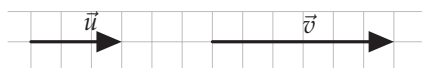
NOTATION :

Pour symboliser un vecteur, on place une flèche horizontale vers la droite sur l'objet.

$\vec{u}$ se lit « vecteur u », $\overrightarrow{AB}$ se lit « vecteur AB ».

Pour le représenter graphiquement, on trace un segment fléché, dont la longueur détermine la norme et l'extrémité de la flèche, le sens.

ILLUSTRATION :



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, même sens, mais pas même norme.



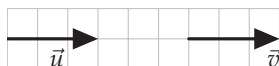
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, même norme, mais pas même sens.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même norme, mais pas même direction.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même norme, même direction mais pas le même sens.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, même sens et même norme.

ATTENTION :

En mathématiques, deux personnes qui se croisent dans un couloir, en estimant que leur trajectoire est rectiligne, portée par le même axe (couloir), vont dans **la même direction**. Elles ne vont pas dans le même sens.

NOTATION :

Pour noter la norme d'un vecteur $\vec{u}$, on écrit $\|\vec{u}\|$.

REMARQUE :

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\|\vec{u}\|$ est un réel positif ou nul, donc $\|\vec{u}\| \geq 0$

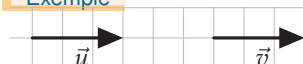
■ PROPRIÉTÉ : Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même norme et même sens.



Podcast

Exemple



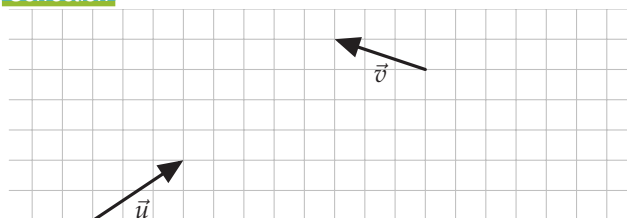
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, même sens et même norme. On a donc $\vec{u} = \vec{v}$.

MÉTHODE 1 Représenter des vecteurs égaux

Exercice d'application

Représenter deux vecteurs égaux au vecteur $\vec{u}$ et au vecteur $\vec{v}$:

Correction



VOCABULAIRE :

On peut dire qu'un vecteur mesure un **déplacement**.

C'est à dire que $\overrightarrow{AB}$ représente le déplacement qui va du point A au point B.

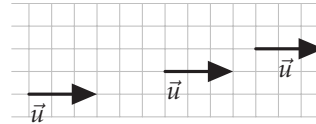
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, cela veut dire que le déplacement de A à B, est le même que celui de C à D.

REMARQUE :

Comme un vecteur mesure un déplacement, on peut représenter le même déplacement à plusieurs endroits.

Un déplacement n'est pas géolocalisé, il peut s'effectuer n'importe où dans le plan.

On peut donc tracer plusieurs "représentants" du même vecteur sur la figure.



■ DÉFINITION : Vecteur nul :

$\overrightarrow{AA}$ représente donc le déplacement qui va du point A au point A !!

On note alors $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et on l'appelle « vecteur nul ».

ATTENTION :

Un vecteur mesure un déplacement. Il ne peut donc pas être égal à un réel.

■ $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ est une égalité entre deux vecteurs, c'est cohérent.

■ $\overrightarrow{AA} = 0$ est une égalité entre un vecteur et un réel, deux objets de nature différente.
C'est absurde.

■ DÉFINITION : Vecteurs opposés :

$\overrightarrow{AB}$ représente le déplacement qui va du point A au point B .

$\overrightarrow{BA}$ représente le déplacement qui va du point B au point A .

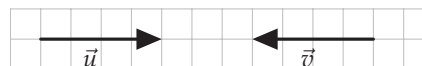
Ces deux déplacements sont opposés (même norme, même direction, mais sens opposé).

On a donc : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Exemple

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, même norme, mais pas même sens. Ce sont des vecteurs opposés.

On écrit : $\vec{u} = -\vec{v}$



■ S'ÉVALUER : QCM n°1



Note :

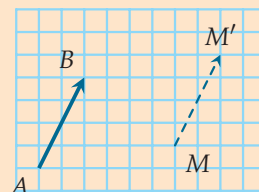
2. Translation vectorielle



Podcast

■ DÉFINITION : Translation

On considère deux points A et B du plan.
On appelle **translation qui transforme A en B**
la transformation qui, à tout point M du plan, associe
l'unique point M' tel $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$



VOCABULAIRE :

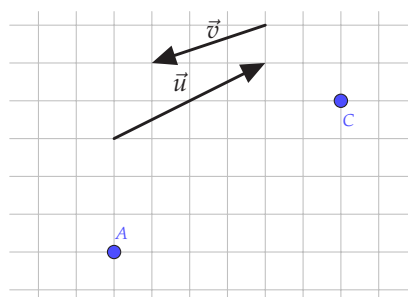
- Le point M' est appelé **image** du point M .
- On dit également que M' est le **translaté** de M .

MÉTHODE 2 Construire l'image d'un point par une translation

Exercice d'application

Placer le point B image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$
et le point D dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Correction

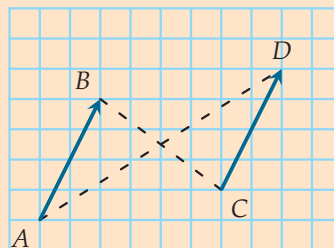


REMARQUE :

La translation est une **transformation** qui sert à **modéliser** un déplacement rectiligne.

■ PROPRIÉTÉ

On considère quatre points A, B, C et D .
Dire que la translation qui transforme A en B transforme C
en D équivaut à dire que $ABDC$ est un **parallélogramme**
(éventuellement aplati).



PREUVE

La démonstration est proche de la prochaine propriété sur l'égalité du parallélogramme, page suivante.

■ S'ÉVALUER : QCM n°2



Note :

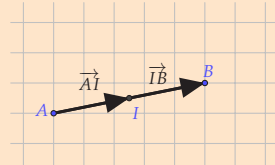
3. Égalités de vecteurs :



Podcast

■ PROPRIÉTÉ : Propriété du milieu :

$\vec{AI} = \vec{IB}$ si et seulement si I milieu de $[AB]$



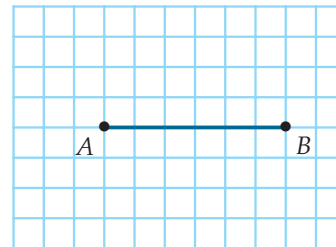
REMARQUE :

Attention!!

La propriété :

" I milieu du segment $[AB] \iff IA = IB$ " est fausse.

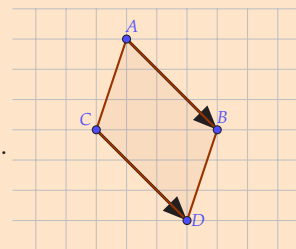
Construisez un contre exemple sur la figure ci-contre.



■ PROPRIÉTÉ : Propriété du parallélogramme :

Soit 4 points du plan.

$\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



REMARQUE : Attention à l'ordre!

On observe bien que sur la figure que $\vec{AB} = \vec{CD}$ donne le parallélogramme $ABDC$ et non pas le parallélogramme $ABCD$.

PREUVE

$\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même norme.

Ce qui se traduit par les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Le quadrilatère $ABDC$ est non croisé et $AB = CD$.

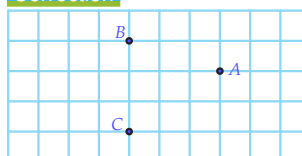
C'est-à-dire si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

MÉTHODE 3 Construire un point à partir d'une égalité vectorielle

Exercice d'application

Construire le point D tel que $\vec{CD} = \vec{AB}$.

Correction



■ S'ÉVALUER : QCM n°3

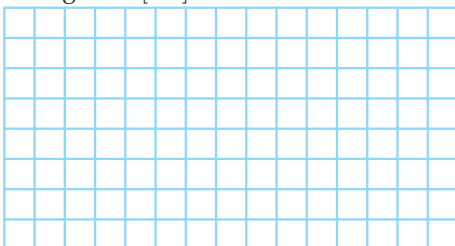


Note :

MÉTHODE 4 Rédiger une démonstration à partir des égalités vectorielles.

Exercice d'application

$ABCD$ et $AFBD$ sont deux parallélogrammes.
Démontrer que B est le milieu du segment $[CF]$



Correction



Correction
en vidéo

4. Opérations avec les vecteurs

A. Somme de deux vecteurs



Podcast

MÉTHODE 5 Construire la somme de deux vecteurs

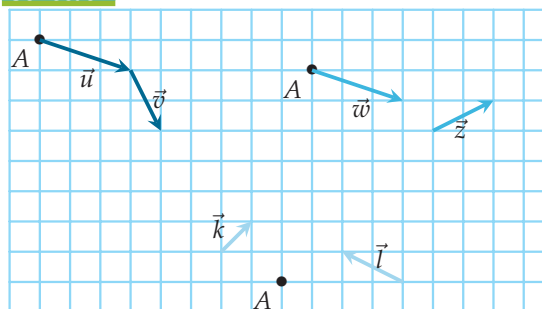
Graphiquement, l'addition de deux vecteurs se fait en plaçant l'origine du deuxième vecteur à l'extrémité du premier.

La somme des deux vecteurs est alors représentée par le vecteur allant de l'origine du premier vecteur à l'extrémité du deuxième.

Exercice d'application

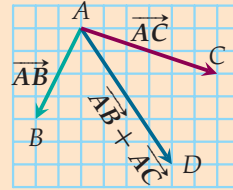
Construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$,
le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \vec{w} + \vec{z}$, et le point E tel que $\overrightarrow{EF} = \vec{k} + \vec{l}$,

Correction



■ PROPRIÉTÉ : Propriété du parallélogramme

Soit A, B, C, D quatre points.
Dire que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ équivaut à dire que
 $ABDC$ est un parallélogramme.



PREUVE

On suppose que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

On utilise la relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

On ajoute $\overrightarrow{CA}$ aux deux membres de l'égalité : $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$.

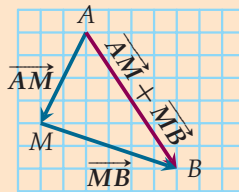
On utilise à nouveau la relation de Chasles avec $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Donc, la relation de départ est équivalente à : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ et $ABDC$ est un parallélogramme.

■ PROPRIÉTÉ : Relation de Chasles

Pour tous points A, B et M du plan,
on a l'égalité dite de Chasles :

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$$



Le cours en vidéo

MÉTHODE 6 Appliquer la relation de Chasles :

Exercice d'application

Écrire le plus simplement possible :

- 1) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$
- 2) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}$
- 3) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$

Correction

- 1)
- 2)
- 3)

■ S'ÉVALUER : QCM n°4



Note :

B. Différence de deux vecteurs.

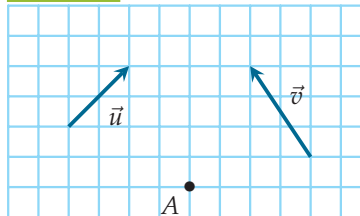
MÉTHODE 7 Construire la différence de deux vecteurs

Soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

Exercice d'application

Construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$,
et le point C tel que $\overrightarrow{CA} = -\vec{u} - \vec{v}$

Correction



C. Multiplication d'un vecteur par un réel.

MÉTHODE 8 Construire un vecteur de type $k\vec{u}$

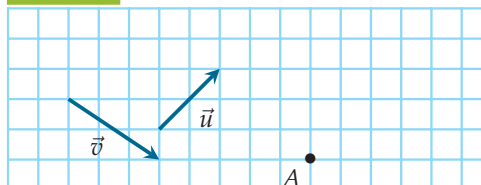
Soit $\vec{u}$ un vecteur, et k un nombre réel, on note $k\vec{u}$ le vecteur :

- de même direction que $\vec{u}$.
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, et de sens contraire si $k < 0$.
- de longueur égale à la longueur de $\vec{u}$ multipliée par $|k|$.

Exercice d'application

Construire les point B et C tels que
 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = -3\vec{v}$

Correction



D. Règles de calcul avec les vecteurs :

REMARQUE : Les vecteurs respectent les mêmes propriétés que nous connaissons sur les nombres pour l'addition, la soustraction et la multiplication par un réel.

■ PROPRIÉTÉ

Si $k\vec{u} = \vec{0}$, alors $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

■ PROPRIÉTÉ

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, et a et b deux nombres réels, alors

- $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
- $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

REMARQUE :

Attention! Les propriétés calculatoires avec les vecteurs ressemblent beaucoup à celles que l'on connaît avec les réels.

Mais restez vigilant, ce ne sont pas les mêmes objets, et les vecteurs n'ont pas toujours les mêmes propriétés que les réels.

Par exemple, on a défini la multiplication d'un réel par un vecteur : $k\vec{u}$ avec k est un réel.

Mais on n'a pas défini ni le produit, ni le quotient de deux vecteurs, qui n'existe pas.

Si on a $\vec{u} = 2\vec{v}$ il serait absurde d'écrire : $\frac{\vec{u}}{\vec{v}} = 2$.

On ne sait pas diviser par un vecteur!!

On définira ultérieurement, une opération (le produit scalaire) que l'on assimilera à la multiplication, mais qui demande d'autres compétences, qui dépassent complètement ce cours.

On retient que pour les sommes et différences, et la distributivité, les propriétés des réels se retrouvent pour les vecteurs.

Mais on ne va pas plus loin.

MÉTHODE 9 Utiliser une égalité vectorielle pour placer un point

Exercice d'application

On donne le segment $[AB]$ ci-contre.

On cherche à placer le point M tel que

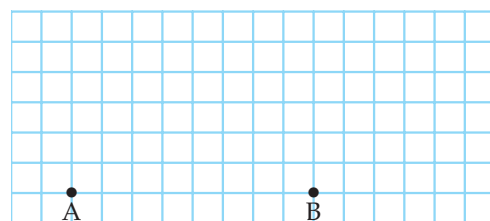
$$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

1) Démontrer que :

$$4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

2) En déduire la construction du point M .

Correction



■ S'ÉVALUER : QCM n°5



Note :

5. Vecteurs colinéaires.

DÉFINITION

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**, s'il existe un nombre réel $k \neq 0$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

REMARQUE :

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils sont portés par des droites parallèles, s'ils ont la même direction.

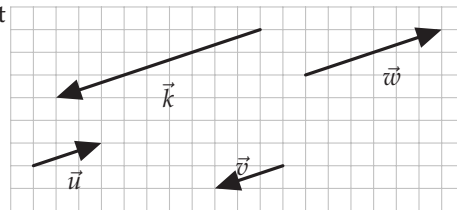
Ils peuvent varier de norme et de sens.

Exemple

Dans la figure ci-contre, les vecteurs représentés ont tous la même direction.

Ils sont donc colinéaires.

- $\vec{v} = -\vec{u}$
- $\vec{w} = 2\vec{u}$
- $\vec{k} = -3\vec{u}$



MÉTHODE 10 Montrer que deux vecteurs sont colinéaires

Exercice d'application

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui vérifient $3\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{0}$.

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires.

Correction

PROPRIÉTÉ

Trois points A , B et C du plan sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

PREUVE Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les deux droites (AB) et (AC) seront parallèles.

Mais comme elles ont un point en commun, elles seront confondues, donc les points A , B et C seront alignés.

S'ÉVALUER : QCM n°6



Note :