Plan de Travail :
Fonctions de références

Fonction carré :

Activité introduction :

1. Découverte avec la calculatrice :
   On considère la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
   a. Déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ à partir de sa représentation graphique.
   b. Déterminer les extremums de f sur $\mathbb{R}$ et son signe.
   c. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

   d. Que dire de la parité de f ? En déduire une symétrie pour la représentation de la fonction f.
   e. Représenter du mieux possible la fonction f sur l'intervalle $[-2; 2]$.
2. Démonstrations :
   a. Soit a et b deux réels tels que : $0 < a < b$
   Démontrer que $a^2 < b^2$.
   En déduire le sens de variations de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ observé au 1.
   b. En procédant de manière similaire, déterminer le sens de variations de la fonction carré sur $\mathbb{R}_-$
   c. Soit $a \in \mathbb{R}$. Comparer $f(a)$ et $f(-a)$. Démontrer la propriété graphique observée au 1.

La fonction carré

Exercice 1
Répondre par lecture graphique :

1. Si $2 < x < 3$ donner un encadrement de x^2 ?
2. Si $-3 < x < -1$ donner un encadrement de x^2 ?
3. Si $-2 < x < 3$ donner un encadrement de x^2 ?

Exercice 2
Répondre par lecture graphique :

1. Si $x^2 > 4$, que peut-on dire de x ?
2. Si $x^2 < 5$, que peut-on dire de x ?
3. Si $1 < x^2 < 5$, que peut-on dire de x ?
4. Si $x^2 < -16$, que peut-on dire de x ?

Exercice 3*
Répondre à partir des variations de la fonction carré :

1. Si $x > 3$, que peut-on dire de x^2 ?
2. Si $x < -2$, que peut-on dire de x^2 ?
3. Si $x > 2$, que peut-on dire de $3x^2$?
4. Si $x < -1$, que peut-on dire de $-2x^2$?
5. Si $x > 2$, que peut-on dire de $5x^2 - 4$?

Exercice 4**
Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$ et donner son extremum.

Exercice 5**
Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 1$ et donner son extremum.

La fonction inverse

Exercice 6

1. Représenter à la calculatrice la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. Analyser ce qui se passe à l'origine du repère pour la courbe représentative de f.
3. En déduire le domaine de définition de f.
4. Conjecturer le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
5. Quelle est la parité de la fonction inverse ? Quelle est la conséquence graphique ?

6. Représenter du mieux possible la fonction inverse sur $[-3;0[\cup]0;3]$
7. Quel est le nom de cette courbe ?

Exercice 7
Répondre par lecture graphique :

1. Si $x > 3$, alors $\frac{1}{x}$..... ;
2. Si $x < -23$, alors $\frac{1}{x}$..... ;
3. Si $x = 5$, alors $\frac{1}{x}$..... ;
4. Si $x = 0{,}4$, alors $\frac{1}{x}$..... ;

Exercice 8*

1. Donner, en utilisant les variations de la fonction inverse, un encadrement de $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

   a. $-0{,}5 < x < -0{,}4$; b. $\frac{2}{3} < x < 1$ c. $x > \frac{1}{5}$ d. $x \leqslant -\sqrt{2}$

2. Dans chaque cas, trouver les réels x qui satisfont la condition donnée :

   (a) $\frac{1}{x} \leqslant \frac{3}{4}$; (b) $\frac{1}{x} > 2$; (c) $-2 < \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{5}$; (d) $-\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 3$

Exercice 9***

1. Soit x un réel tel que $1 < x \leqslant 2$
   (a) Montrer que $(x-1)^3 \leqslant (x-1)^2$
   (b) Que peut-on en déduire pour $\frac{1}{(x-1)^3}$ et $\frac{1}{(x-1)^2}$?
2. La proposition « Pour tout réel $x > 1$, $\frac{1}{(x-1)^3} \geqslant \frac{1}{(x-1)^2}$ » est-elle vraie ou fausse ?

La fonction racine carrée

Exercice 10
Représenter à la calculatrice la fonction inverse $f(x) = \sqrt{x}$.
Analyser la courbe représentative de f et en déduire le domaine de définition de f.

Exercice 11
A partir de la représentation graphique de la fonction racine carrée, f obtenue à la calculatrice, conjecturer le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 12
A partir de la représentation graphique de la fonction racine carrée, f obtenue à la calculatrice, répondre à ces questions :

1. Si $x > 9$, alors $\sqrt{x}$..... ;
2. Si $x < 1$, alors $\sqrt{x}$.... ;
3. Si $x > 5$, alors $\sqrt{x}$..... ;
4. Si $2 < x3$, alors $\sqrt{x}$..... ;

Exercice 13*

1. Donner un encadrement de $\sqrt{x}$ dans chacun des cas suivants :

   a. $4 < x < 16$; b. $3 < x < 7$ c. $x > 4$ d. $x \leqslant \sqrt{2}$

2. Dans chaque cas, trouver les réels x qui satisfont la condition donnée :

   a. $\sqrt{x} \leqslant \frac{9}{4}$; b. $\sqrt{x} > 2$; c. $1 < \sqrt{x} \leqslant 16$; d. $7 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 11$

Exercice 14***

Soit x un nombre réel.

On cherche à étudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = -2\sqrt{x-3}$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Déterminer le sens de variation de la fonction h définie par $h(x) = x - 3$
3. Déterminer le sens de variation de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x-3}$
4. En déduire les variations de f

La fonction cube

Exercice 15

Représenter à la calculatrice la fonction cube $f(x) = x^3$. Analyser la courbe représentative de f et en déduire le domaine de définition de f.

Exercice 16

A partir de la représentation graphique de la fonction cube, f obtenue à la calculatrice, conjecturer le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 17

A partir de la représentation graphique de la fonction cube, f obtenue à la calculatrice, répondre à ces questions :

1. Si $x > 2$, alors x^3..... ;
2. Si $x \geqslant -3$, alors x^3..... ;
3. Si $-2 \leqslant x \leqslant 1$, alors ....$x^3$..... ;
4. Si $x > -3$, alors x^3..... ;

Exercice 18*

1. Donner un encadrement de x^3 dans chacun des cas suivants :

   a. $2 < x < 5$; b. $-3 < x < -2$ c. $-4 < x < 2$ d. $x \leqslant \sqrt{2}$

2. Dans chaque cas, trouver les réels x qui satisfont la condition donnée :

   a. $x^3 \leqslant 64$; b. $x^3 > 8$; c. $1 < x^3 \leqslant 27$; d. $7 \leqslant x^3 \leqslant 11$

Exercice 19***

Soit x un nombre réel.

On cherche à étudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = -3x - 1^3$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Déterminer le sens de variation de la fonction h définie par $h(x) = x - 1$
3. Déterminer le sens de variation de la fonction i définie par $i(x) = (x-1)^3$
4. En déduire les variations de f

Pour aller plus loin :

Forme canonique :

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 4x - 5.$$

1. Forme canonique :**
   a. Développer $(x+2)^2$, pour tout x de $\mathbb{R}$.
   b. Compléter alors la relation suivante :

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - \cdots .$$

c. En déduire les valeurs manquantes de la relation suivante :

$$f(x) = (x+2)^2 - \cdots .$$

On dit que f est alors mise sous forme ***canonique***.

2. Variations de f :***
   a. Soit $a \in [-2;+\infty[$ et $b \in [-2;+\infty[$ tels que $a < b$.
   En utilisant la forme canonique, comparer $f(a)$ et $f(b)$.
   En déduire les variations de f sur $[-2;+\infty[$
   b. A partir d'une démonstration similaire, déterminer le sens de variations de f sur $]-\infty;-2[$
   c. En déduire que la fonction f admet un minimum que l'on déterminera.

Exercice 21**

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^2 - 6x + 9.$$

1. Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = -3(x+1)^2 + 12.$$

2. Factoriser $f(x)$.
3. Répondre aux questions suivantes, en utilisant l'expression de f la mieux adaptée.
   a. Calculer l'image de 0 par f.
   b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   c. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.
4. a. *** Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $[-1;+\infty[$.
   b. En déduire que la fonction f admet un maximum que l'on précisera.

Accès
aux corrections