15. Les fonctions de référence.

I FONCTION CARRÉ

1 DÉFINITION

Définition

On appelle fonction carré, la fonction qui à tout réel x fait correspondre le nombre par x^2.

Vidéo de cours

Application :

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$
On a alors : $f(2) = 2^2 = 4$; $f(-3) = (-3)^2 = 9$; $f(0) = 0^2 = 0$

Exercice 1

1. Quel est l'image de 3 par la fonction carrée ?
2. 4 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ?
3. 3 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ?
4. -1 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ?

Correction :

1. On calcule $f(3) = 3^2 = 9$.

2. Déterminer les antécédents de 4 par f c'est résoudre l'équation

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \\ x^2 &= 4 \\ x = -2 \quad &\text{ou} \quad x = 2 \\ S &= \{-2; 2\} \end{aligned}$$

4 possède deux antécédents par la fonction carré : -2 et 2.

3. Déterminer les antécédents de 3 par f c'est résoudre l'équation

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \\ x^2 &= 3 \\ x = -\sqrt{3} \quad &\text{ou} \quad x = \sqrt{3} \\ S &= \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\} \end{aligned}$$

3 possède deux antécédents par la fonction carré : $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

4. Déterminer les antécédents de -1 par f c'est résoudre l'équation $f(x) = -1$. Or on sait qu'un carré est toujours positif, donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 \geqslant 0$.
-1 n'a aucun antécédent avec la fonction carrée.

Première propriété :

- Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.
- Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$.

2 VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

Propriété :

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$

Vidéo de cours

DÉMONSTRATION :

Première partie : Étudions les variations de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0[$:
Soit $a < b < 0$, on veut savoir si $f(b) < f(a)$ ou $f(b) > f(a)$

Méthode

On calcule pour cela $f(b) - f(a)$ et on cherche à déterminer son signe.
Si $f(b) - f(a) > 0$ alors cela est équivalent à $f(b) > f(a)$, ce qui implique que f est croissante sur l'intervalle.
Si $f(b) - f(a) < 0$ alors cela est équivalent à $f(b) < f(a)$, ce qui implique que f est décroissante sur l'intervalle.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= b^2 - a^2 \\ &= (b-a)(b+a) \end{aligned}$$

Objectif

Il nous faut déterminer le signe de $(b-a)(b+a)$ pour conclure.

comme $a < b$, on a $b - a > 0$
et comme $a < b < 0$, puisqu'on est sur $\mathbb{R}_-$, on a $a + b < 0$
On vient de montrer que $(b-a)(b+a)$ est le produit d'un réel positif par un réel négatif.
Avec la règle des signes, $(b-a)(b+a) < 0$
On vient de montrer que $f(b) - f(a) < 0$ et $f(b) < f(a)$
On vient de montrer que si $a < b < 0, f(a) > f(b)$,
les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse.
C'est la définition d'une fonction décroissante sur l'intervalle.

Deuxième partie :
En procédant de façon symétrique, on prouverait que la fonction est donc croissante sur $[0; +\infty[$

Tableau des variations de la fonction carré

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

C'est le minimum !

On observe que la fonction admet un minimum en 0 qui vaut 0

Conséquences

Propriété

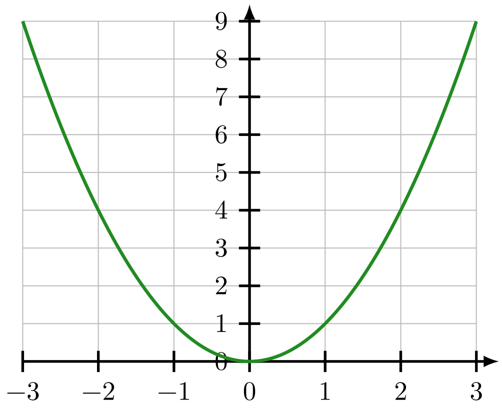
- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.
  Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$
- Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
  Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$

3 Courbe représentative

Définition

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la **parabole** $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.
Elle admet un **sommet** à l'origine du repère.

Vidéo de cours



Remarque :

Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a^2 \leqslant a$.
Autrement dit, sur l'intervalle $[0;1]$, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ est au dessous de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

4 Parité

Pour tout nombre x, on a $x^2 = (-x)^2$ donc $f(x) = f(-x)$.
Deux nombres opposés ont donc la même image, la fonction carré est donc une fonction paire.
La parabole représentative de la fonction carrée admet donc l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

5 S'évaluer :

QCM 1

II Fonction inverse

1 Définition

Vidéo de cours

Définition :

La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Ensemble de définition

Attention, l'ensemble de définition de la fonction inverse est l'ensemble des réels non nuls noté $\mathbb{R}^*$,
c'est la réunion de deux intervalles $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

2 Variations de la fonction inverse

Vidéo de cours

Propriété :

La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

Démonstration :

Soient a et b deux réels non nuls et f la fonction inverse.
Comme pour la fonction carré, l'idée est de déterminer le signe de $f(a) - f(b)$:

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ &= \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} && \text{Mise au même dénominateur} \\ &= \frac{b-a}{ab} && \text{Simplification du numérateur} \end{aligned}$$

- Étude du signe de l'expression quand $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$
  On a alors $a < b < 0$ implique $b - a > 0$ et $ab > 0$ (produit de deux réels négatifs) donc

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{ab} > 0 \\ \iff & \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \\ \iff & \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ \iff & f(a) > f(b) \end{aligned}$$

  On a montré que $a < b < 0$ implique $f(a) > f(b)$
  Les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse.
  Donc la fonction est bien strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.
- Étude du signe de l'expression quand $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$

  On a alors $0 < a < b$ donc $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{ab} > 0 \\ \iff & \frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0 \\ \iff & \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ \iff & f(a) > f(b) \end{aligned}$$

  On a montré que $a < b < 0$ implique $f(a) > f(b)$
  Les images et les antécédents sont rangés dans l'ordre inverse.
  donc la fonction est bien strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

3 Tableau des variations de la fonction inverse

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Notation :
On note une "double barre" dans le tableau en 0 pour signifier que la valeur est interdite, la fonction est définie pour tout réel non-nul.

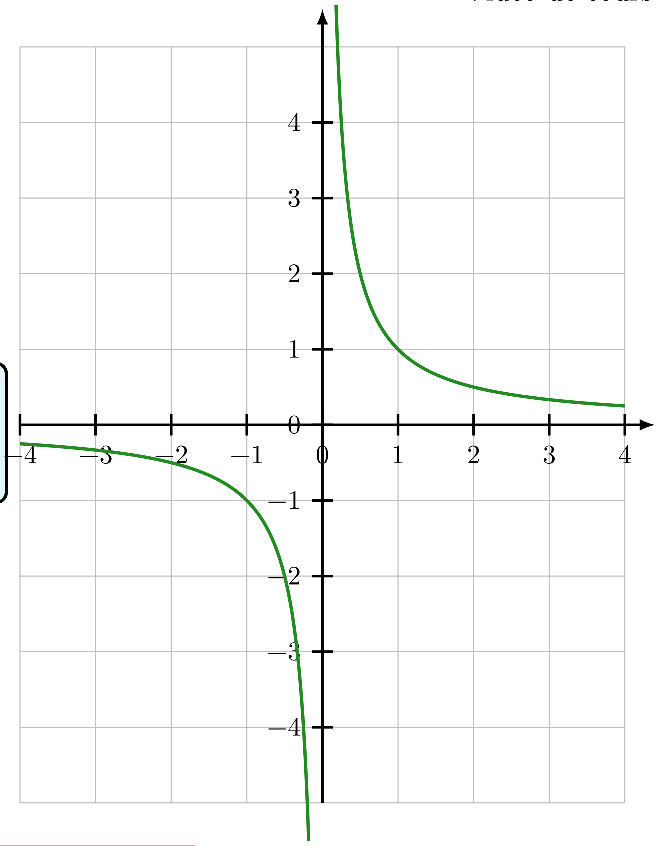
Attention !!
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$
Attention, il est faux de de dire que la fonction inverse est "globalement" décroissante sur son domaine, ou décroissante sur $\mathbb{R}$.
Elle est décroissante sur 2 intervalles disjoints.

Vidéo de cours

4 Courbe représentative

Définition

La courbe représentative de la fonction inverse est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.



Remarque hors programme !!

On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.
On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.
Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) , et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.
On dit que l'hyperbole a pour **asymptotes** les axes du repère.

5 Parité :

Pour tout réel $a \neq 0$, $f(-a) = -\dfrac{1}{a} = -f(a)$.
La fonction inverse est donc une fonction impaire.
L'hyperbole admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

6 S'évaluer :

QCM 2

III Fonction racine carrée

1 Définition d'une racine carrée (rappel) :

Définition :

Soit a un réel positif. Le nombre $\sqrt{a}$ est le seul réel positif dont le carré est a.

Vidéo de cours

2 Définition de la fonction racine carrée :

Définition

La fonction racine carrée est la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Attention !

Il ne faut pas confondre $(\sqrt{x})^2$ et $\sqrt{x^2}$:

- $(\sqrt{x})^2 = x$ seulement pour $x \geqslant 0$.
- $\begin{cases} \text{Si } \ x \geqslant 0, \text{ alors } \ \sqrt{x^2} = x. \\ \text{Si } \ x \leqslant 0, \text{ alors } \ -x \geqslant 0, \text{ d'où } \ \sqrt{x^2} = -x. \end{cases}$

Exemple :

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \ \text{ alors que } \ \left(\sqrt{-2}\right)^2 \ \text{ n'existe pas.}$$

3 Variations de la fonction racine carrée

Propriété :

La fonction racine carrée définie pour tout réel x positif par $f(x)=\sqrt{x}$ est strictement croissante.

x	0 $+\infty$
$f(x)$	↗

Démonstration :

Soit a et b deux réels positifs tels que $0 \leqslant a < b$:

$$a-b = (\sqrt{a})^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$$

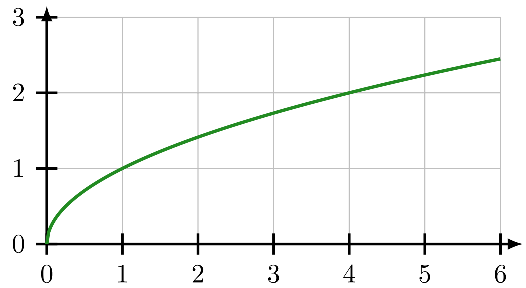
Comme $0 \leqslant a < b$, alors $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) > 0$. Par conséquent, $a-b$ et $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ sont de même signe.
Ainsi, si $a-b<0$ alors $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) < 0$ soit $f(a) < f(b)$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

4 Courbe représentative

Vidéo de cours

Définition :

La représentation graphique de la fonction racine carrée est une **branche de parabole**.



5 Equations avec des racines carrées.

Propriété :

Pour tout $a \geqslant 0$, :

- $\sqrt{x} = a \iff x = a^2$
- $\sqrt{x} > a \iff x > a^2$
- $\sqrt{x} < a \iff 0 \leq x < a^2$

Vidéo de cours

Exercice 2

Résoudre $\sqrt{x} = 7$ Comme $7 > 0$, on sait que $\sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow x = 7^2 = 49$

$$S = \{49\}$$

Exercice 3

Résoudre $\sqrt{x} < 5$ Comme $5 > 0$, on sait que $\sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow 0 \leq x < 5^2$ $\sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow 0 \leq x < 25$ donc $S = [0; 25[$

Exercice 4

Résoudre $\sqrt{x} > -1$
On sait que pour tout $x \in D_f = \mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant 0$.
donc $S = \mathbb{R}_+$

6 S'évaluer :

QCM 3

IV Fonction cube

1 Définition

Définition

La fonction cube est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3$.

Vidéo de cours

2 Variations de la fonction cube

Propriété

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

Démonstration :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$:

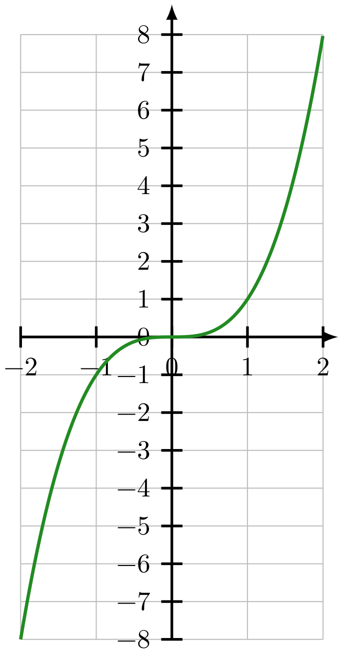
- Si $a < 0$ et $b > 0$, alors $a^3 < 0$ et $b^3 > 0$ donc $a^3 < b^3$.
- Si a et b sont de même signe :
  Pour tous réel a et b on a
  $$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$ Ce résultat n'est pas à connaître, il serait donné dans un énoncé.
  a et b étant de même signe, le produit $ab > 0$ d'où $a^2 + ab + b^2 > 0$.
  Par conséquent, $a^3 - b^3$ est du même signe que $(a - b)$.
  Comme $a < b$ on en déduit que $a^3 < b^3$.

3 PARITÉ :

Propriété :
La fonction cube est une fonction impaire. Sa courbe représentative admet donc l'origine du repère comme centre de symétrie.

Démonstration :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$
ce qui est la définition dune fonction impaire.

4 COURBE REPRÉSENTATIVE



en zéro ?
La fonction cube marque "une pause" dans sa croissance en zéro mais ne stagne pas, elle est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5 S'ÉVALUER :

QCM 4

V DÉMONSTRATIONS FONDAMENTALES DU COURS

1 VARIATIONS DES FONCTIONS CARRÉ, INVERSE ET RACINE CARRÉE

Démonstration en vidéo

2 ÉTUDIER LA POSITION RELATIVE DES COURBES D'ÉQUATION $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, POUR $x \geqslant 0$

Démonstration en vidéo

3 S'ÉVALUER :

QCM 5