Plan de Travail : Fonctions dérivées

Correction exercice 1 (Un peu difficile...)

Partie A :

1. À partir du graphique et des renseignements fournis déterminer la valeur du coût marginal pour $x = 5$.
Le nombre dérivé $f'(5)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point $B(5; 75)$.
Comme cette droite passe par l'origine du repère, on en déduit que :
$$f'(5) = \frac{75}{5} = 15$$
Le coût marginal pour $x = 5$ est $f'(5) = 15$.
2. Quelle est, parmi les trois courbes proposées ci-dessous, celle qui représente le coût marginal ?
   - On sait que :$f'(5) = 15$ et $f'(3) > 0$ donc la courbe C_3 ne peut pas représenter la dérivée f'.
   - Pour départager C_1 et C_2, c'est plus subtil.... Le vrai argument est de terminale.
   Sur $[0; 3]$, la fonction est croissante mais on observe qu'elle croît de moins en moins, pour presque stagner vers 3.
   Le coefficient directeur de la tangente à la courbe est donc positif mais décroît pour se rapprocher de zéro vers l'abscisse 3.
   Cette remarque subtile écarte le graphique 2.

   Cette question posée ainsi est limite programme et hors-champs évaluation.

Partie B :

1. Calculer $f'(x)$.
f' est la fonction définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par $f'(x) = 3x^2 - 18x + 30$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.
Le discriminant du polynôme du second degré $3x^2 - 18x + 30$ est :
$$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 3 \times 30 = -36$$
$\Delta < 0$ donc pour tout réel x,$3x^2 - 18x + 30 > 0$ Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 9]$,
$f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante.

Partie C :

1. La fonction B est définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par
$$B(x) = 30x - \left(x^3 - 9x^2 + 30x + 25\right) = -x^3 + 9x^2 - 25$$
La dérivée de la fonction B est la fonction B' définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par :
$$B'(x) = -3x^2 + 18x = -3x(x - 6)$$
Les variations de la fonction B se déduisent du signe de sa dérivée.

x	0		6		9
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-25	$\nearrow$	83	$\searrow$	-25

Le bénéfice maximal est obtenu pour la vente de 6000 articles.

2. On a : $B(0) < 0 < B(6)$ et $B(9) < 0 < B(6)$.
   L'équation $B(x) = 0$ admet une solution unique sur chacun de ces intervalles $x_1 \in [0; 6]$ et $x_2 \in [6; 9]$.
   La vraie démonstration se fait en Terminale avec un théorème qui prouve cette affirmation.
   À l'aide de la calculatrice, on trouve $x_1 \approx 1{,}873$ et $x_2 \approx 8{,}667$.