Exercices issus des annales E3C sur les dérivées.

Exercice 1

On souhaite fabriquer des boîtes de rangement sans couvercle.

Les boîtes auront la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur 16 cm et de base un rectangle ayant pour dimensions x et y exprimées en cm. Chaque boîte a un volume de 10000 cm^3.

1. Calculer y lorsque $x = 20$ cm.
2. Pour toute valeur de $x > 0$, on note $f(x)$ l'aire du parallélépipède rectangle.

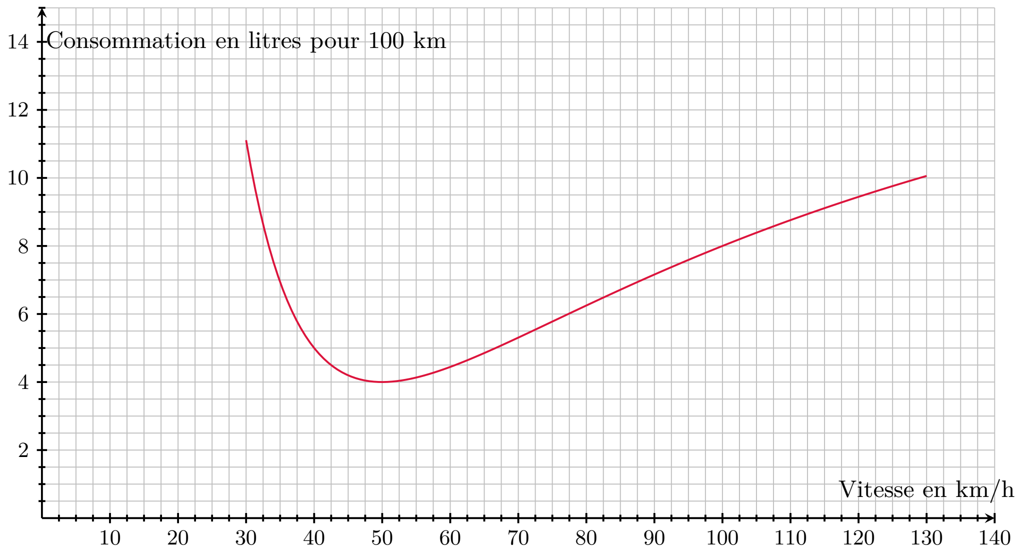
   Démontrer que : pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{20000}{x} + 32x + 625$.
3. Quelles dimensions doit-on donner à ces boîtes pour que leur surface ait une aire minimale ?

Exercice 2

On s'intéresse à la consommation d'essence d'un véhicule en fonction de sa vitesse.

Lecture graphique

Le graphique ci-dessous représente la consommation d'essence en litres pour 100 km en fonction de la vitesse en km.h^{-1} du véhicule.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la consommation du véhicule lorsque celui-ci roule à 40 km.h^{-1} ?
2. Pour quelle(s) vitesse(s) le véhicule consomme-t-il 8 litres pour 100 km ?
3. Pour quelle vitesse la consommation du véhicule semble-t-elle minimale ?

Modélisation

Si on note x la vitesse du véhicule en km.h^{-1}, avec $30 \leqslant x \leqslant 130$, la consommation d'essence en litres pour 100 km est modélisée par la fonction f d'expression :

$$f(x) = \frac{20x^2 - 1600x + 40000}{x^2}.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[30\,;\,130]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [30\ ;\ 130]$,

$$f'(x) = \frac{800\,(2x - 100)}{x^3}.$$

2. Démontrer la conjoncture de la question 3.

Exercice 3

Un médicament contre la douleur est administré par voie orale. La concentration du produit actif dans le sang, en milligramme par litre de sang, est modélisé par la fonction f qui, au temps écoulé x en heure, x étant compris entre 0 et 6, associe :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x \quad \text{où} \quad x \in [0\ ;\ 6].$$

Le produit actif est efficace si sa concentration dans le sang est supérieure ou égale à 5 mg/L.

1. En exécutant le script Python ci-dessous, on obtient la liste $[0, 1, 1, 1, 1, 1, 0]$.

```
liste=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
for x in range(0,7) :
    if x**3-12*x**2+36*x>=5:
        liste[x]= 1
print(liste)
```

   À l'aide de ce résultat, indiquer l'intervalle de temps en unité d'heures sur lequel le médicament est efficace.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,6]$, calculer sa fonction dérivée.
3. Justifier que la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 4 admet pour équation réduite $y = -12x + 64$.
4. Démontrer que $f(x) - (-12x + 64) = (x - 4)^3$.
5. En déduire la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à la tangente T au point A.

Exercice 4

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

1. On note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)(x - 1)$
   (b) En déduire le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Déterminer l'abscisse du point de la courbe représentative de f pour lequel le coefficient directeur de la tangente vaut 7.
2. On note x_0 l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. On admet que $x_0 \in [1\ ;\ 2]$.
   On considère la fonction suivante définie en langage Python.

```
def zero_de_f(n) :
a = 1
b = 2
for k in range(n) :
  x = (a + b)/2
  if x**3 - x**2 - x - 1 < 0 :
    a = x
  else :
    b = x
return a, b
```

   (a) On applique cette fonction pour $n = 3$. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

Itération	$x = \dfrac{a+b}{2}$	$f(x) < 0$?	a	b	Amplitude de $[a\ ;\ b]$
$k = 0$	1,5	OUI	1,5	2	0,5
$k = 1$					
$k = 2$					

   (b) En déduire un encadrement de x_0, d'amplitude 0,125, par deux nombres décimaux.

Accès aux corrigés