

# Correction devoir surveillé de mathématiques

## Exercice 1

(4,5 points)

1. Soit  $f$  une fonction telle que, pour tout nombre réel  $h$  non nul,

$$\text{On calcule } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 + 3h - 1 = -1.$$

$$\text{On sait que } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ donc } f'(1) = -1$$

2. On sait que l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse  $a$ , est donnée par :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

On applique cette relation avec les éléments de l'énoncé :

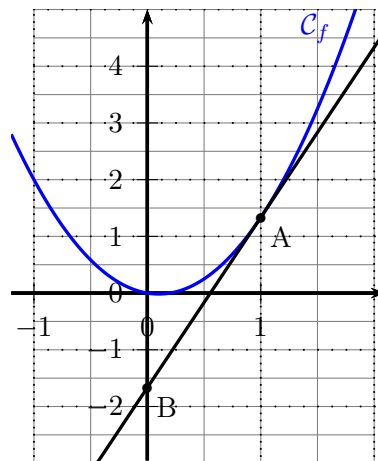
Il vient :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$y = -1(x - 2) + 5$$

$$y = -x + 7$$

3. Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  dans un repère est la courbe ci-dessous.



La tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A  $\left(1; \frac{4}{3}\right)$  passe par le point B  $\left(0; -\frac{5}{3}\right)$ .

Alors :

Pour l'équation réduite de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point A, l'ordonnée à l'origine est celle de B

soit  $-\frac{5}{3}$  et son coefficient directeur est celle de la droite (AB), soit  $\frac{-\frac{5}{3} - \frac{4}{3}}{0 - 1} = \frac{-3}{-1} = 3$ .

On sait que ce coefficient directeur est égal au nombre dérivé  $f'(1) = 3$ .

## Exercice 2

(4,5 points)

Déterminer les dérivées des fonctions  $f$ ,  $g$ , et  $h$ , en détaillant vos calculs, mais sans se soucier du domaine de définition et de dérivabilité :

1.  $f(x) = \frac{3 - x^2}{6 + x}$

On reconnaît une forme  $f = \frac{u}{v}$  qui donne  $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec  $u(x) = 3 - x^2$  qui donne  $u'(x) = -2x$

et  $v(x) = 6 + x$  qui donne  $v'(x) = 1$

On applique :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x(6+x) - (3-x^2) \times 1}{(6+x)^2} \\ &= \frac{-12x - 2x^2 - 3 + x^2}{(6+x)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 12x - 3}{(6+x)^2} \end{aligned}$$

2.  $g(x) = 3x^2 \times \sqrt{x}$

On reconnaît une forme  $f = uv$  qui donne  $f' = u'v + uv'$

avec  $u(x) = 3x^2$  qui donne  $u'(x) = 6x$

et  $v(x) = \sqrt{x}$  qui donne  $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

On applique :

$$g'(x) = 6x \times \sqrt{x} + 3x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Cette expression suffit dans cet exercice

$$= \frac{2\sqrt{x}(6x \times \sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + 3x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

mise au même dénominateur

$$= \frac{12x\sqrt{x^2} + 3x^2}{2\sqrt{x}}$$

Comme  $x > 0$  pour que la racine carrée existe,  $\sqrt{x^2} = x$

$$= \frac{15x^2}{2\sqrt{x}}$$

Cette expression permet d'étudier le signe de la dérivée.

On ne demandait pas nécessairement la simplification de l'expression.

Que ceux qui sont à l'aise étudient cette stratégie qui peut être utile.

3.  $h(x) = \frac{1}{x^2 + x}$

On reconnaît une forme  $f = \frac{1}{v}$  qui donne  $f' = -\frac{v'}{v^2}$

avec  $v(x) = x^2 + x$  qui donne  $v'(x) = 2x + 1$

On applique :

$$h'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$$

### Exercice 3

(5 points)

Pour étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 4$ , on étudie le signe de sa dérivée :

On trouve, avec les relations de cours :  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$

On reconnaît un polynôme de degré 2, on calcule son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 40$$

Le polynôme admet donc deux racines réelles :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{2 + \sqrt{40}}{6} \\ &= \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{2 - \sqrt{40}}{6} \\ &= \frac{1 - \sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

on sait que le trinôme est du signe de  $a=1$  coefficient de  $x^2$  à l'extérieur des racines.  
Il vient le tableau suivant :

|         |           |                         |                         |           |
|---------|-----------|-------------------------|-------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\frac{1-\sqrt{10}}{3}$ | $\frac{1+\sqrt{10}}{3}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0                       | -                       | +         |
| $f(x)$  |           |                         |                         |           |

$$\alpha_1 = f\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) \approx 4,2 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = f\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) \approx 2,3$$

### Remarque !

On évite de mettre des valeurs approchées dans un tableau de variations.  
L'astuce consiste à nommer les valeurs par des lettres, dont on calcule séparément des valeurs approchées.

#### Exercice 4

(6 points)

Une entreprise fabrique  $q$  milliers d'objets,  $q \in [1 ; 20]$ .

Le coût total de fabrication, exprimé en euros en fonction de  $q$ , est donné par l'expression :

$$C(q) = q^3 - 18q^2 + 750q + 200.$$

- $C(5000) = 5000^3 - 18 \times 5000^2 + 750 \times 5000 + 200 = 3625$ .
- (a) Le coût moyen de fabrication d'un millier d'objets lorsqu'on fabrique 5000 objets est donc :  

$$\frac{C(5000)}{5000} = \frac{3625}{5000} = 0,725.$$
- (b) On a sur l'intervalle  $[1 ; 20]$ , :

$$\begin{aligned} C'_M(q) &= 2q - 18 - \frac{200}{q^2} && \text{formules des dérivées usuelles} \\ &= \frac{2q^3 - 18q^2 - 200}{q^2} && \text{mise au même dénominateur} \end{aligned}$$

Pour trouver la forme proposée dans le sujet, on développe le numérateur de celle-ci :

$$\begin{aligned} 2(q-10)(q^2+q+10) &= (2q-20)(q^2+q+10) \\ &= 2q^3 + 2q^2 + 20q - 20q^2 - 20q - 200 \\ &= 2q^3 - 18q^2 - 200 && \text{soit le numérateur de } C'_M(q). \end{aligned}$$

On a donc montré que, pour tout  $q \in [1; 20]$ , :

$$\begin{aligned} C'_M(q) &= \frac{2q^3 - 18q^2 - 200}{q^2} && \text{premier calcul de dérivée} \\ &= \frac{2(q-10)(q^2+q+10)}{q^2} && \text{Développement effectué ensuite} \end{aligned}$$

- (c)  $C'_M$  est composé de 3 facteurs, dont on va déterminer séparément le signe :

- Étude du signe de  $q^2 + q + 10$  :

On reconnaît un polynôme du second degré. On calcule son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 40 = -39 < 0$$

Le polynôme n'admet donc pas de racines réelles et on sait que le trinôme est positif (signe de  $a=1$  coefficient de  $x^2$ ).

- On a trivialement  $q^2 > 0$  sur  $[1; 20]$

- Étude du signe de  $q - 10$  :

$$\text{on a } q - 10 > 0 \iff q > 10$$

On en déduit que  $C'_M(q)$  est du signe de  $q - 10$ ,

donc sur  $[1; 10]$ ,  $C'_M(x) \leq 0$  et sur  $[10; 20]$ ,  $C'_M(x) \geq 0$

Il vient le tableau suivant :

| $q$     | 1   | 10  | 20  |
|---------|-----|-----|-----|
| $C'(q)$ | -   | 0   | +   |
| $C(q)$  | 933 | 690 | 800 |

$$C_M(1) = 1 - 18 + 750 + 200 = 933$$

$$C_M(10) = 10^2 - 18 \times 10 + 750 + 20 = 690.$$

$$C_M(20) = 20^2 - 18 \times 20 + 750 + 10 = 800.$$

- (d)  $C_M$  admet un minimum en 10 car sa dérivée s'annule en changeant de signes en cette valeur. Comme  $q$  représente des milliers d'objets, on déduit que le coût moyen est minimum pour une production de 10000 objets.  
On a calculé que le coût moyen minimal est de 690 est obtenue lorsque l'entreprise fabrique 10000 objets.