Correction Devoir surveillé de mathématiques

Exercice 1

1. a. $f(-2) = 4$.

b. En se décalant d'une unité vers la droite à partir du point A, on descend de 7 unités pour retrouver un point de la droite. Ainsi :$f'(-2) = -7$.

Attention au repère !
Le repère n'est pas orthonormé, il faut deux carreaux pour une unité sur les abscisses !!

c. La tangente au point d'abscisse -1 (le point B) est horizontale. Sa pente est donc nulle. Ainsi, $f'(-1) = 0$.

d. En se décalant d'une demi unité vers la droite à partir du point C, on descend de 2 unités pour retrouver un point de la droite. Ainsi :$f'(-2) = \dfrac{\text{"Déplacement vertical"}}{\text{"Déplacement horizontal"}} = \dfrac{-2}{0{,}5} = -4$.

2. Le coefficient directeur de la tangente est donné par le nombre dérivé.
En -2, le coefficient directeur de la tangente est -7.

$$T_{-2} \ : \ y = -7x + p$$

Le point $A(-2\ ;\ 4)$ est sur T_{-2}, donc ses coordonnées vérifient l'équation.
$4 = -7 \times (-2) + p$ soit $p = -10$. On en déduit :

$$T_{-2} \ : \ y = -7x - 10$$

3. Comme $f'(0) = 1$, on en déduit que le coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse 0 est 1.
On trace donc une droite passant par le point de coordonnées $(0;2)$ de coefficient directeur 1 : en se déplaçant de une unité à droite, on monte de 1 unité.

4. $f'(x) = 0$ lorsque la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale. On a $x_1 = -1$ et $0 < x_2 < 0{,}5$.

Explications
Si $a < x < b$, l'amplitude de l'encadrement est $b - a$. Ici, $0{,}5 - 0 = 0{,}5$, on a bien un encadrement d'amplitude 0,5.

Exercice 2

Pour déterminer $f'(2)$, on commence par calculer le taux de variation de f, entre 2 et $2+h$, noté $\tau(h)$, où h est un réel non-nul.

$\tau(h) = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$	Définition du taux de variation
$= \dfrac{(2+h)^2 - (2)^2}{h}$	Application à la fonction carré.
$= \dfrac{2^2 + 2 \times 2 \times h + h^2 - 2^2}{h}$	Développement de l'identité remarquable.
$= \dfrac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$	Simplification au numérateur.
$= \dfrac{4h + h^2}{h}$	Réduction au numérateur.
$= \dfrac{h(4+h)}{h}$	Factorisation par h au numérateur.
$= 4 + h$	Simplification par$h$

On cherche maintenant la limite du taux de variations quand h tend vers 0.
$\lim\limits_{h \to 0} 4 + h = 4$
Comme la limite existe, on peut en déduire que f est dérivable en 2
et on peut conclure que $f'(2) = 4$

Exercice 3

Pour déterminer $f'(7)$, on commence par calculer le taux de variation de f,
entre 7 et $7+h$, noté $\tau(h)$, où h est un réel non-nul.

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{f(7+h)-f(7)}{h} && \text{Définition du taux de variation}\\
&= \frac{\sqrt{7+h}-\sqrt{7}}{h} && \text{Application à la fonction racine carrée.}\\
&= \frac{(\sqrt{7+h}-\sqrt{7})(\sqrt{7+h}+\sqrt{7})}{h(\sqrt{7+h}+\sqrt{7})} && \text{Multiplication par la "quantité conjuguée".}\\
&= \frac{7+h-7}{h(\sqrt{7+h}+\sqrt{7})} && \text{Identité remarquable : } (a-b)(a+b)=a^2-b^2\\
&= \frac{h}{h(\sqrt{7+h}+\sqrt{7})} && \text{Réduction au numérateur .}\\
&= \frac{1}{\sqrt{7+h}+\sqrt{7}} && \text{Simplification de la fraction par } h.
\end{aligned}$$

On cherche maintenant la limite du taux de variations quand h tend vers 0.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{7+h}+\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

On peut donc conclure que $f'(7)=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$

Exercice 4

$2\in[-5;5]$ donc la fonction est dérivable en 2.
On peut donc appliquer la formule de cours qui donne une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2 :

$(T) : y=f'(a)(x-a)+f(a)$ On cite la relation de cours.

$(T) : y=f'(2)(x-2)+f(2)$ On applique à l'énoncé.

$(T) : y=0(x-2)-3$ On remplace les valeurs connues.

$(T) : y=0-3$ On développe.

On peut conclure que : $(T) : y=-3$.

Exercice 5

On sait que la tangente n'est pas une droite verticale, puisque la fonction est dérivable sur l'intervalle.
On en déduit que la tangente (T) au point d'abscisse 5, admet une équation réduite de la forme : $(T) : y=mx+p$.

• Détermination de m :
On sait que le nombre dérivé en 5 est par définition, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 5.
Par conséquent, on a déjà : $m=f'(5)=5$.
On en déduit que $(T) : y=5x+p$
• Détermination de p :
Pour cela, on utilise que si $f(5)=2$, alors le point A de coordonnées $(5;2)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ mais aussi à (T).
On peut écrire $A(5;2)=\mathcal{C}_f\cap(T)$.
On remplace alors les coordonnées de $A(5;2)$ dans l'équation $(T) : y=5x+p$.

$$\begin{aligned}
& A(5;2)\in(T)\\
\iff & 2=5\times5+p\\
\iff & p=2-5\times5\\
\iff & p=2-25\\
\iff & p=-23
\end{aligned}$$

On peut conclure que : $(T) : y=5x-23$.