Correction Devoir surveillé de mathématiques
Probabilités conditionnelles

Exercice 1 (5 points)

Question 1

On sait que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
soit $\frac{4}{7} = \frac{3}{7} + \frac{3}{20} - P(A \cap B)$, d'où :

$$P(A \cap B) = \frac{3}{7} + \frac{3}{20} - \frac{4}{7} = \frac{3}{20} - \frac{1}{7} = \frac{21}{140} - \frac{20}{140} = \frac{1}{140}.\ \textbf{Réponse D}$$

- On a $P(A) \times P(B) = \frac{9}{140}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{140}$: les évènements A et B ne sont pas indépendants. (Réponse A fausse)
- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{140}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{140} \times \frac{7}{3} = \frac{1}{60}$.(Réponse B fausse)
- $P(A \cap B) = \frac{1}{140}$. (**Réponse C vraie !**)
- $P_A(B) = \frac{1}{60}$. (**Réponse D vraie !**)

Erreur d'énoncé !

Deux bonnes réponses à cette question, en contradiction avec l'énoncé, issu d'un sujet officiel.
Le correcteur ne peut pas pénaliser un élève suite à un énoncé mal posé. Ceux qui ont répondu une des deux réponses ont le point, ainsi que ceux ayant répondu les deux réponses.

Question 2

- On a $P_B(E) = 0,3$ (énoncé). (Réponse A fausse)
- $P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = 0,6 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,3 + 0,12 = 0,42$. (**Réponse B vraie**)
- $P(B \cap E) = P(B) \times P_B(E) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$. (Réponse C fausse.)
- Une probabilité est inférieure ou égale à 1. (Réponse D fausse.)

Question 3

D'après la formule des probabilités totales, on a :$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$, d'où $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B})$, d'où $P(A \cap B) = 0,4 - 0,3 = 0,1$. (**Réponse A vraie** et B fausse).
D'autre part, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,6 - 0,1 = 0,9$ (Réponses C et D fausses).

Question 4

Soient A et B deux évènements d'un univers tels que $P_A(B) = 0,2$ et $P(A) = 0,5$.
Alors la probabilité $P(A \cap B)$ est égale à :

$$\text{On a } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \iff 0,2 = \frac{P(A \cap B)}{0,5} \iff P(A \cap B) = 0,2 \times 0,5 = 0,1. \quad \textbf{Réponse B vraie.}$$

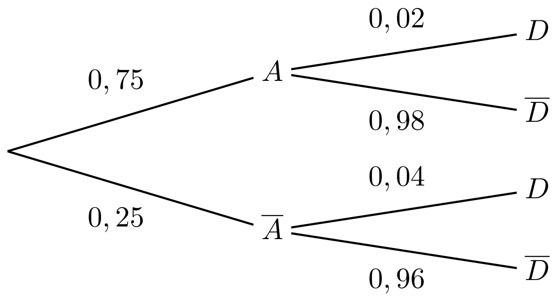
Question 5

On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
comme A et B sont indépendants $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,2 \times 0,5 = 0,1$, donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6$. **Réponse C vraie.**

Exercice 2

1. Le site A produit les trois-quarts des aiguilles donc $P(A) = 0,75$.

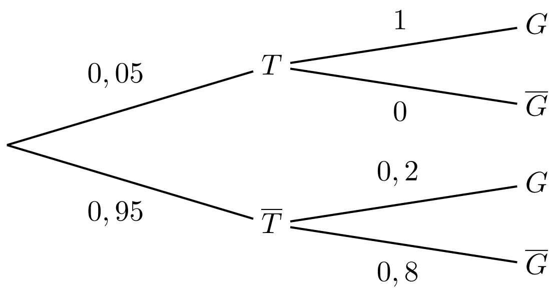
2. On complète l'arbre de probabilités ci-dessous :



3. La probabilité que l'aiguille ait un défaut et provienne du site A est :
   $P(A \cap D) = 0,75 \times 0,02 = 0,015$.
4. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(D) = P(A \cap D) + p\left(\overline{A} \cap D\right) = 0,75 \times 0,02 + 0,25 \times 0,04 = 0,025$.
5. Après inspection, l'aiguille choisie se révèle défectueuse.
   La probabilité qu'elle ait été produite sur le site A est :
   $P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,015}{0,025} = 0,6$.

Exercice 3

La seule probabilité totale que nous connaissions est celle de la Triche, dont $P(T)$.
On ne peut donc construire que cet arbre :



On cherche la probabilité qu'il ait triché sachant qu'il a gagné, donc la probabilité cherchée est $P_G(T)$.
Cette probabilité n'apparaît pas dans cet arbre. il faut la calculer avec les éléments de cours :
On sait que :$P_G(T) = \dfrac{P(G \cap T)}{P(G)}$. Il s'agit donc de calculer $P(G \cap T)$ et $P(G)$:

- $P(G \cap T) = P(T) \times P_T(G) = 0,05 \times 1 = 0,05$.
- D'après la formule des probabilités totales, comme T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, on obtient :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(T \cap G) + P(T \cap \overline{G}) \\ &= P(T) \times P_T(G) + P(T) \times P_T(\overline{G}) \\ &= 0,05 \times 1 + 0,95 \times 0,2 \\ &= 0,24 \end{aligned}$$

La probabilité que Roger gagne est 0,24.

Ainsi, $P_G(T) = \dfrac{0,05}{0,24} = \dfrac{5}{24}$.