Devoir surveillé de mathématiques

Durée de l'épreuve : 45 minutes
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Les questions sont indépendantes.
Pour chacune des cinq questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification nest demandée mais il peut être nécessaire deffectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer la réponse.
Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Question 1

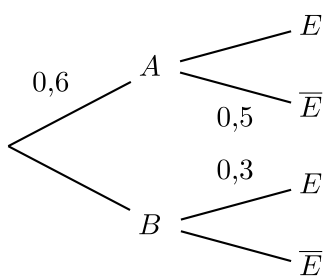
A et B sont deux évènements, et on donne $P(A) = \frac{3}{7}$, $P(B) = \frac{3}{20}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{7}$.

a. A et B sont indépendants.	**b.** $P_A(B) = \frac{3}{980}$	**c.** $P(A \cap B) = \frac{1}{140}$	**d.** $P_A(B) = \frac{1}{60}$

Question 2

On choisit au hasard un individu parmi les passagers en transit dans un aéroport. On a représenté ci-dessous un arbre de probabilités lié à certains évènements dont certains éléments ont été effacés.
On considère les évènements suivants :

- A : « le passager parle anglais »
- B : « le passager ne parle pas anglais »
- E : « le passager est un membre de l'Union Européenne »



a. $P_B(E) = 0,12$	**b.** $p(E) = 0,42$	**c.** La probabilité que le passager choisi soit européen et ne parle pas anglais est 0,3	**d.** $P(A \cup B) = 1,1$

Question 3

Lors d'une même expérience aléatoire, deux évènements A et B vérifient :

$$P(A) = 0,4 \quad ; \quad P(B) = 0,6 \quad ; \quad P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,3$$

Alors :

a. $P(A \cap B) = 0,1$	**b.** $P(A \cap B) = 0,24$	**c.** $P(A \cup B) = 1$	**d.** $P(A \cup B) = 0,7$

Question 4

Soient A et B deux évènements d'un univers tels que $P_A(B) = 0,2$ et $P(A) = 0,5$.
Alors la probabilité $P(A \cap B)$ est égale à :

a. 0,4	**b.** 0,1	**c.** 0,25	**d.** 0,7

Question 5

Soit p une probabilité sur un univers Ω et A et B deux évènements indépendants tels que $p(A) = 0,5$ et $p(B) = 0,2$.
Alors $p(A \cup B)$ est égal à :

a. $0,1$	**b.** $0,7$	**c.** $0,6$	**d.** On ne peut pas savoir.

Exercice 2 (9 points)

Une entreprise qui fabrique des aiguilles dispose de deux sites de production, le site A et le site B.
Le site A produit les trois-quarts des aiguilles, le site B l'autre quart.
Certaines aiguilles peuvent présenter un défaut. Une étude de contrôle de qualité a révélé que :

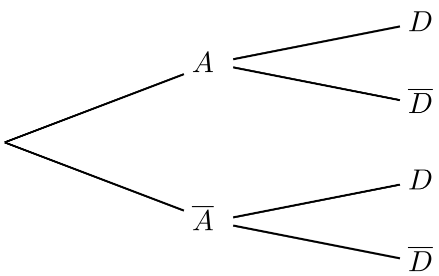
- 2 % des aiguilles du site A sont défectueuses ;
- 4 % des aiguilles du site B sont défectueuses.

Les aiguilles provenant des deux sites sont mélangées et vendues ensemble par lots.
On choisit une aiguille au hasard dans un lot et on considère les évènements suivants :

- A : l'aiguille provient du site A ;
- B : l'aiguille provient du site B ;
- D : l'aiguille présente un défaut.

L'évènement contraire de D est noté $\overline{D}$.

1. D'après les données de l'énoncé, donner la valeur de la probabilité de l'évènement A que l'on notera $P(A)$.
2. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilités ci- dessous en indiquant les probabilités sur les branches.
3. Quelle est la probabilité que l'aiguille ait un défaut et provienne du site A ?
4. Montrer que $P(D) = 0,025$.
5. Après inspection, l'aiguille choisie se révèle défectueuse.
   Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite sur le site A ?



Exercice 3 (5 points)

Raoul le dit lui-même :
" *Je ne triche que rarement, disons* 5% *du temps, mais quand je triche, je gagne à coup sûr !* ".
Ce soir, il joue à un jeu de plateau avec quatre de ses amis et, comme ils sont tous de même niveau, on estime qu'ils ont tous une probabilité de victoire de $\frac{1}{5}$, si Raoul ne triche pas. . .
Raoul gagne une partie, quelle est la probabilité qu'il ait triché ?
Toute trace de recherche sera valorisée.

Exercice 4 (5,5 points)

Une entreprise qui fabrique des aiguilles dispose de deux sites de production, le site A et le site B. Le site A produit les trois-quarts des aiguilles, le site B l'autre quart.
Certaines aiguilles peuvent présenter un défaut. Une étude de contrôle de qualité a révélé que :

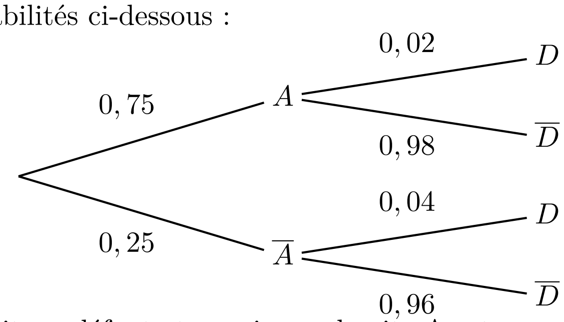
- 2 % des aiguilles du site A sont défectueuses ;
- 4 % des aiguilles du site B sont défectueuses.

Les aiguilles provenant des deux sites sont mélangées et vendues ensemble par lots.
On choisit une aiguille au hasard dans un lot et on considère les évènements suivants :

- A : l'aiguille provient du site A ;
- B : l'aiguille provient du site B ;
- D : l'aiguille présente un défaut.

L'évènement contraire de D est noté $\overline{D}$.

1. Le site A produit les trois-quarts des aiguilles donc $P(A) = 0,75$.
2. On complète l'arbre de probabilités ci-dessous :



3. La probabilité que l'aiguille ait un défaut et provienne du site A est :
   $P(A \cap D) = 0,75 \times 0,02 = 0,015$.
4. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(D) = P(A \cap D) + P\left(\overline{A} \cap D\right) = 0,75 \times 0,02 + 0,25 \times 0,04 = 0,025$.
5. Après inspection, l'aiguille choisie se révèle défectueuse.
   La probabilité qu'elle ait été produite sur le site A est :
   $P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,015}{0,025} = 0,6$.

Exercice 5

La probabilité cherchée est $P_G(T)$.
$P_C(T) = \frac{P(G \cap T)}{P(G)}$.
On sait que Math a gagné une partie.
Il s'agit donc de calculer $P(G \cap T)$ et $P(G)$.
- $P(G \cap T) = P(T) \times P_T(G) = 0,05 \times 1 = 0,05$.
- D'après la formule des probabilités totales, comme T et $\bar{T}$ forment une partition de l'univers, on obtient :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(T \cap G) + P(T \cap G) \\ &= P(T) \times P_T(G) + P(T) \times P_T(G) \\ &= 0,05 \times 1 + 0,95 \times 0,2 \\ &= 0,24 \end{aligned}$$

La probabilité que Math gagne est 0,24. Ainsi, $P_G(T) = \frac{0,05}{0,24} = \frac{5}{24}$.

Exercice 6 6 points

1. Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
   Déterminer la valeur de $f'(4)$, en utilisant la définition de cours.
2. Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Déterminer la valeur de $f'(-5)$, en utilisant la définition de cours.