Probabilités Conditionnelles

I Représentation sous forme d'un arbre pondéré

1 Définition du modèle :

Modélisation d'une suite d'expériences aléatoires

Quand on réalise plusieurs expériences aléatoires, on peut modéliser la situation par un **arbre pondéré**, dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.

Exemple :
On propose une expérience aléatoire :
Un utilisateur choisit au hasard une boule dans une urne contenant dix boules indiscernables au toucher :

Vidéo de cours

Aie ! La boulette

Trouverez-vous la boulette dans la vidéo de cours ??

- 5 sont marquées de la lettre A,
- 3 marquées de la lettre B
- 2 marquées de la lettre C.

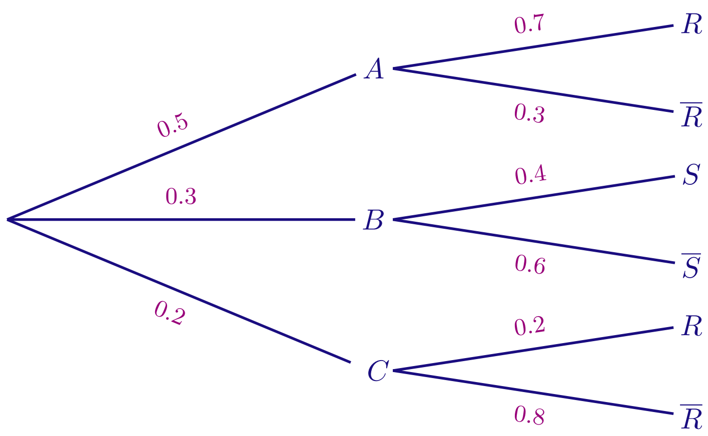
L'utilisateur joue alors une deuxième fois :

$\rightarrow$ S'il a obtenu A , il rejoue dans une urne contenant 10 boules dont 7 marquées d'un R.

$\rightarrow$ S'il a obtenu B , il rejoue dans une urne contenant 10 boules dont 4 marquées d'un S.

$\rightarrow$ S'il a obtenu C , il rejoue dans une urne contenant 10 boules dont 2 marquées d'un R.

En appelant, $\overline{R}$ l'évènement "non-R",
$\overline{S}$ l'évènement "non-S",
on peut représenter cette expérience par cet arbre pondéré :



Tirage successifs :

Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'**intersection** des évènements qui le composent.

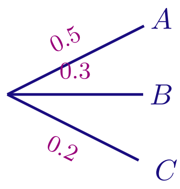
Exemple :
L'événement qui se compose de A au premier tirage et de R au deuxième est noté $A \cap R$.

2 CALCULS DANS UN ARBRE PONDÉRÉ :

Règle n° 1 :
La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple :

Voilà un extrait de l'arbre pondéré de départ :

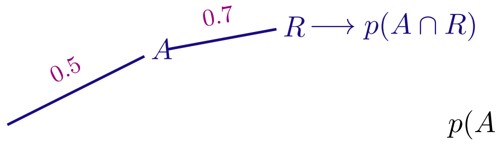


Au premier nœud, on a bien $p($
$p(C) = 0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$

Règle ° 2 :
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.

Exemple :

Voilà un extrait de l'arbre pondéré de départ :

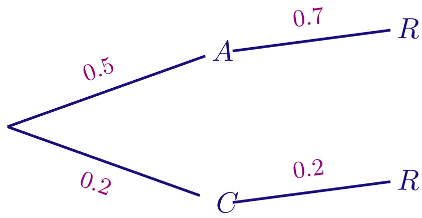


$p(A \cap R) = 0.5 \times 0.7 = 0.35$

Règle n° 3 :
La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet évènement.

Exemple :

Voilà un extrait de l'arbre pondéré de départ :



Il y a deux branches qui aboutissent à R :
La probabilité d'avoir R est égale à leur somme :
$p(R) = p(A \cap R) + p(C \cap R) = 0,5 \times 0,7 + 0.2 \times 0,2 = 0.39$

S'ÉVALUER

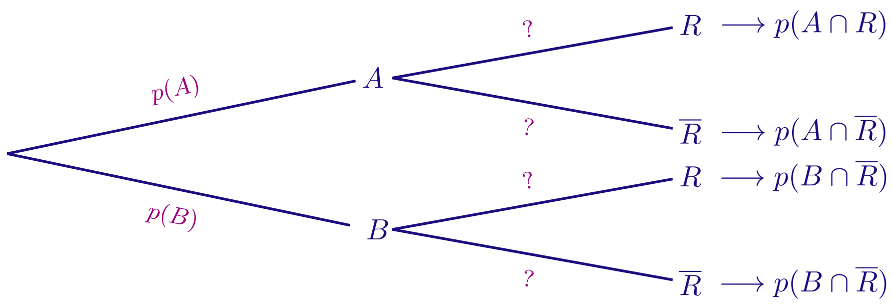
QCM 1

II PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1 INTRODUCTION :

Dans l'arbre pondéré ci-dessous, on peut lire sur les premières branches de l'arbre :$p(A)$ et $p(B)$
On a défini que l'événement A puis R se nomme $A \cap R$ ainsi que sa probabilité : $p(A \cap R)$ De la même manière, on peut définir chacun des enchaînements d'événements suivants.

Vidéo de cours



Question !

Comment nommer la probabilité de la branche de second niveau, qui va de **A** à **R** ?

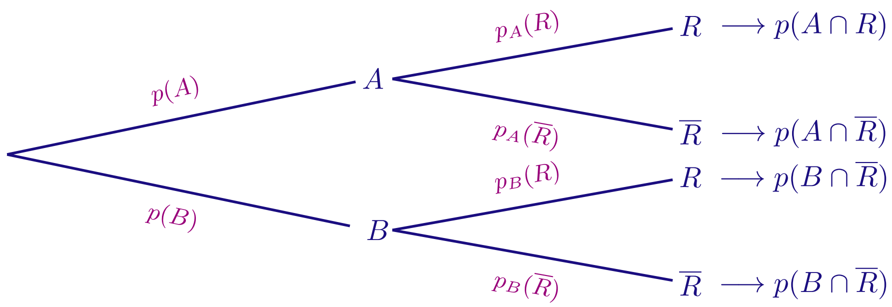
On ne peut pas la nommer $p(R)$ car cela serait ambigu avec la branche issue de B rejoignant R.
Pour distinguer ces deux événements, on doit faire référence à l'issue du premier tirage : A ou B.

On distingue alors l'événement **R sachant A** de l'événement **R sachant B**.

Notation !

On note alors : $\boldsymbol{p_{\mathbf{A}}(R)}$ l'événement R **sachant** A et $\boldsymbol{p_B(R)}$ l'événement R **sachant** B.

On obtient alors cet arbre :



Évident !

Il vient alors avec les propriétés de calculs sur une branche l'égalité suivante :

$$p(A) \times p_A(R) = p(A \cap R)$$

2 DÉFINITION

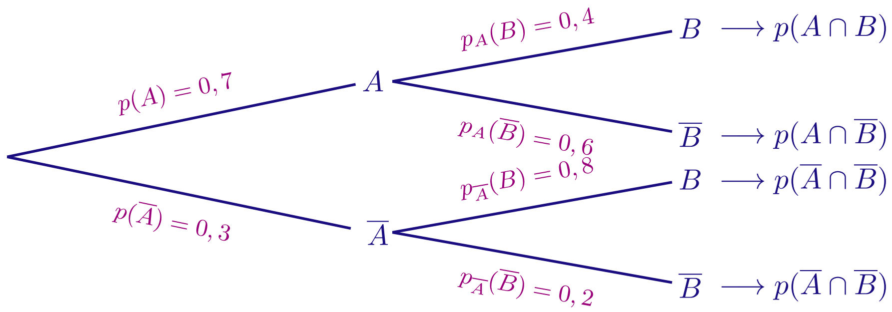
Définition

Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'évènement B **sachant** que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$ et on a :

$$p_A(B) = \frac{p\,(A \cap B)}{p(A)}$$

3 EXEMPLE :

On demande à des élèves de première d'un lycée, s'ils aiment pratiquer l'Athlétisme et le Badminton, respectivement notés A et B.
On représente les résultats sous la forme de cet arbre pondéré :



Notez bien que cette modélisation suppose qu'on a d'abord demandé s'ils aimaient l'athlétisme et ensuite seulement le badminton.

Remarque n°1

Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.

Exemple :
Dans l'arbre précédent, on a bien $p(A) = 0,7$ puisqu'il s'agit d'une branche primaire.
70% des élèves aiment donc l'athlétisme.

Probabilité totale :

C'est le seul chemin qui passe par A.
On peut dire que c'est une **probabilité totale**

Remarque n°2

Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.

Exemple :
Dans l'arbre précédent, on a $p_A(B) = 0,4$, il s'agit d'une branche secondaire.
Cela représente la proportion d'élève qui aime le badminton, **parmi ceux** qui aiment l'athlétisme.
C'est la probabilité d'avoir B **sachant** qu'on est passé par A.
Ce n'est donc pas une probabilité totale !
Il y a d'autres élèves qui aiment le badminton (il y en a parmi ceux qui n'aiment pas l'athlétisme !!).

Probabilité conditionnelle :

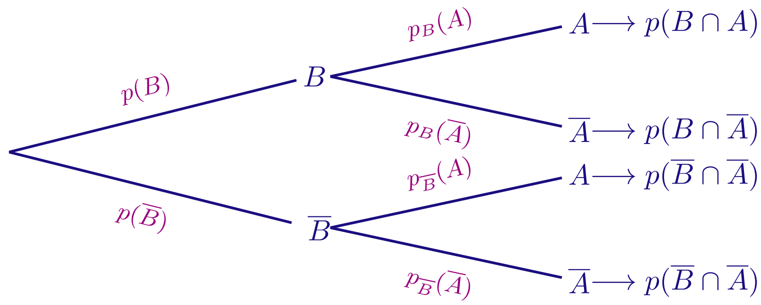
Toutes les probabilités de deuxième branche supposent une condition pour la première branche.
C'est donc toujours une **probabilité conditionnelle.**

Remarque n°3

Si $p(B) \neq 0$ on définit de même $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Sœur jumelle !

C'est la formule que nous obtiendrons en construisant l'arbre avec en première branche l'événement B puis A en deuxième, en observant que $p(A \cap B) = p(B \cap A)$



Dans cette modélisation, on a d'abord demandé aux élèves s'ils aimaient le badminton, puis ensuite s'ils aimaient l'athlétisme.

Le piège classique !

Attention de bien distinguer l'événement $A \cap B$ de l'événement B sachant A et de de l'événement A sachant B.

$\longrightarrow$ $A \cap B$ représente l'ensemble des élèves qui **aiment l'athlétisme et le badminton**. L'ordre dans lequel on leur a posé la question n'importe pas.

$\longrightarrow$ B sachant A correspond à ceux qui aiment le badminton, parmi ceux qui aiment déjà l'athlétisme. Cela suppose qu'un premier tri à été effectué, on ne travaille plus avec l'ensemble des élèves.

$\longrightarrow$ A sachant B correspond à ceux qui aiment le l'athlétisme, parmi ceux qui aiment déjà badminton. Cela suppose qu'un premier tri à été effectué, on ne travaille plus avec l'ensemble des élèves.

S'ÉVALUER

QCM 2

III FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES :

1 CAS DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Propriété fondamentale :

Si A est un évènement de Ω tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

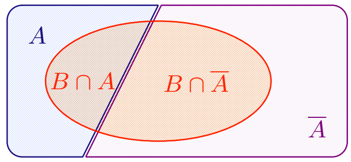
$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$

Vidéo de cours

Preuve :

On sait, avec la relation fondamentale des probabilités que,
pour tout événement A et B,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



Considérons les évènements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$.
Appliquons cette relation à ces deux évènements :
avant cela, remarquons que :
$(A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = B$ et $(A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cap B\right) = \emptyset$
Il vient :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$

2 PARTITION

Définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n\}$ un ensemble d'évènements de probabilités non nulles d'un même univers Ω.
$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n$ forment une **partition** de l'univers Ω si, et seulement si, tout évènement élémentaire de Ω appartient à l'un des évènements A_i et à un seul. C'est à dire si, et seulement si,

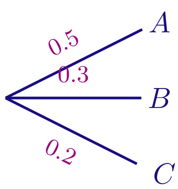
- Pour tous entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Remarque n°1

Les évènements qui se trouvent aux extrémités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'évènement situé à ce nœud.

Exemple :

Voilà un extrait de l'arbre pondéré de début de cours :



$\{A, B, C\}$ forme une partition de l'univers Ω.
Ils couvrent toutes les possibilités et il n'est pas possible de choisir deux de ces évènements.

Remarque n°2

Un évènement A de probabilité non nulle et son évènement contraire $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

Remarque n°3

Si les évènements $A_1,\, A_2,\, \cdots,\, A_n$ forment une partition de Ω alors $p\left(A_1\right) + p\left(A_2\right) + \cdots + p\left(A_n\right) = 1$

3 FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Généralisation de la formule des probabilités totales :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 si $\{A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout évènement B de Ω,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

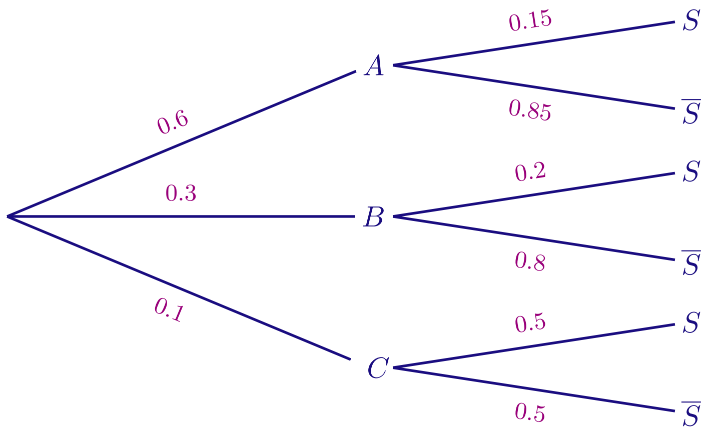
Exercice 1

Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance.

- 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables.
- 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables.
- Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.

On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable ?

Correction :
Notons S l'évènement : « la fiche est celle d'un ordinateur portable »
On peut représenter la situation par un arbre pondéré :



Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) \\ &= 0,15 \times 0,6 + 0,2 \times 0,3 + 0,5 \times 0,1 = 0,2 \end{aligned}$$

La probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable est 0,2.

S'ÉVALUER

QCM 3

IV FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES :

Définition

Nous avons vu en début de cours que la relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire de la manière suivante

$$p\,(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

Cette écriture s'appelle la *formule des probabilités composées*

Vidéo de cours

Dans les deux sens !

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
Alors :

$$p\,(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

Cette relation est évidente, si on comprend qu'on peut construire deux arbres différents, en commenàant par l'évènement A, ou par l'évènement B, comme illustré dans l'exemple de cours page 4-5.

Exercice 2

85 % d'une population est vaccinée contre une maladie. On a constaté que 2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.
Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade ?

Correction :

Soit V l'évènement : « Un individu est vacciné » et M l'évènement : « Un individu est malade » ;
Nous avons $p(V) = 0,85$ et $p_V(M) = 0,02$.
La probabilité que parmi cette population, une personne soit vaccinée et malade est :

$$p(V \cap M) = 0,02 \times 0,85 = 0,017$$

S'ÉVALUER

QCM 4

V Evènements indépendants :

1 Indépendance de deux évènements

Définition

Dire que deux évènements évènements A et B sont indépendants signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Vidéo de cours

Astuce !

Dire que deux évènements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'évènement de l'autre.

2 Propriété

Propriété :

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ on a les équivalences :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff p_B(A) = p(A) \iff p_A(B) = p(B)$$

Preuve :

Si $p(A) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.
de même, si $p(B) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$.
Or, A et B sont indépendants si, et seulement si, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
Ainsi :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants si, et seulement si } \quad p(A) \times p(B) = p(A) \times p_A(B) \iff p(B) = p_A(B)$$

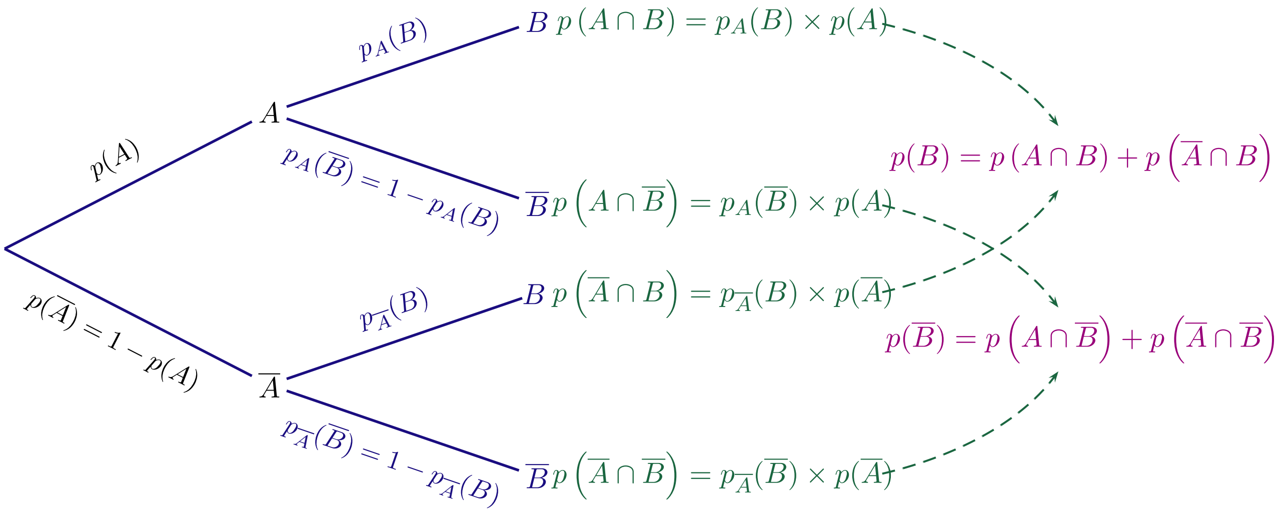
S'évaluer

QCM 5

Synthèse :

Vidéo de cours

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES **PROBABILITÉS COMPOSÉES** **PROBABILITÉS TOTALES**



Exercice de synthèse :

Exercice 3

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

- 13,5 % des bovins d'un troupeau sont malades et ont réagi au test ;
- 1,5 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test ;
- 84,8 % des bêtes n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.
2. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.

Correction :

Correction question 1

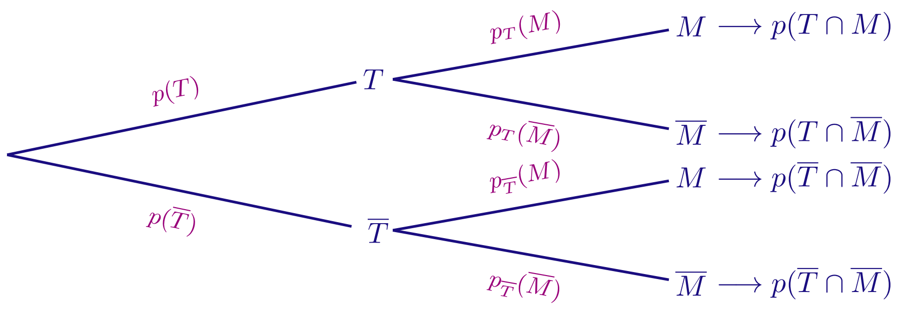
Correction question 2

On définit deux événements :

— T l'événement :"Le bovin a réagi au test".

— M l'évènement :"Le bovin est malade".

On note $\overline{T}$ et $\overline{M}$ les évènements contraires de T et M. On déduit de l'énoncé l'arbre pondéré suivant :



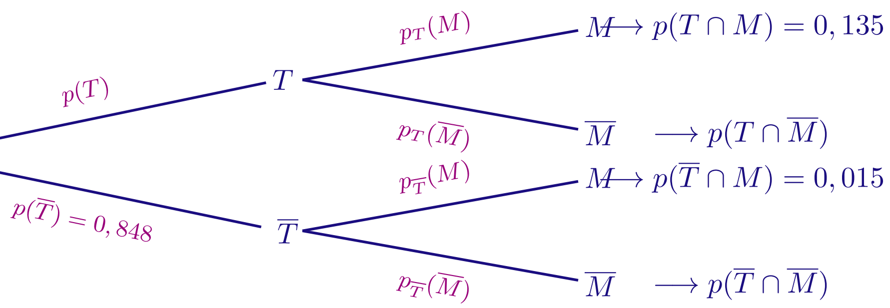
D'après l'énoncé :

— 13,5 % des bovins d'un troupeau sont malades et ont réagi au test donc $p(M \cap T) = 0,135$

— 1,5 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test donc $p(M \cap \overline{T}) = 0,015$

— 84,8 % des bêtes n'ont pas réagi au test donc $p(\overline{T}) = 0,848$

On obtient donc :



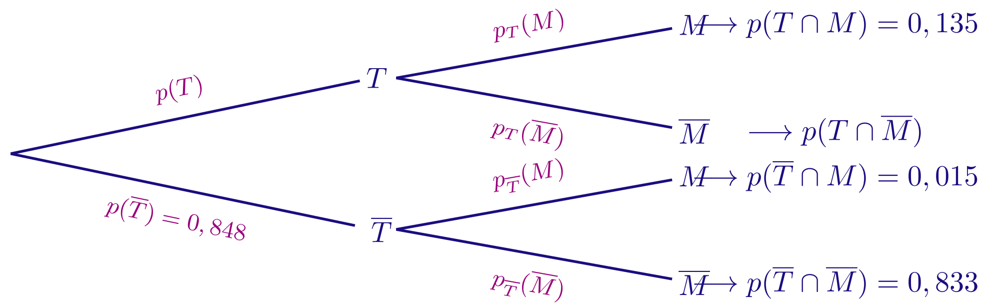
1. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.
   On doit calculer : $p_{\overline{T}}(\overline{M})$
   M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, donc :

$$p(\overline{T} \cap \overline{M}) + p(\overline{T} \cap M) = p(\overline{T})$$

   donc : $p(\overline{T} \cap \overline{M}) = p(\overline{T}) - p(\overline{T} \cap M) = 0,848 - 0,015 = 0,833$
   On sait d'après le cours que :

$$p_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{p(\overline{T} \cap \overline{M})}{p(\overline{T})} = \frac{0,833}{0,848} \approx 0,98$$

   La probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif est de 0,98 environ.



2. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
   On doit calculer : $p_{\overline{M}}(\overline{T})$
   On sait d'après le cours que :
   $$p_{\overline{M}}(\overline{T}) = \frac{p(\overline{T} \cap \overline{M})}{p(\overline{M})} = \frac{0,833}{p(\overline{M})}$$
   Il nous faut calculer : $p(\overline{M})$:
   T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc :
   $$p(\overline{M} \cap \overline{T}) + p(\overline{M} \cap T) = p(\overline{M})$$
   On a trouvé : $p(\overline{M} \cap \overline{T})$ $=0,833$.

   Il nous faut calculer : $p(\overline{M} \cap T)$:

   Comme
   $$p(\overline{M} \cap T + p(M \cap T) + p(\overline{T} \cap M + p(\overline{M} \cap \overline{T}) = 1$$
   On en déduit que : $p(\overline{M} \cap T)$ $=1 - 0,135 - 1,015 - 0,833 = 0,017$

   Il vient alors :$p(\overline{M}) = p(\overline{M} \cap \overline{T}) + p(\overline{M} \cap T) = 0,833 + 0,017 = 0,85$

   Au final : $p_{\overline{M}}(\overline{T}) = \dfrac{p(\overline{T} \cap \overline{M})}{p(\overline{M})} = \dfrac{0,833}{0,85} = 0,98$
   La probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade est de 0,98.

Exercice 4(Sujet bac ES:)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} si nécessaire.
On rappelle que le triathlon est une discipline qui comporte trois sports : la natation, le cyclisme et la course à pied.
Fabien s'entraîne tous les jours pour un triathlon et organise son entraînement de la façon suivante :

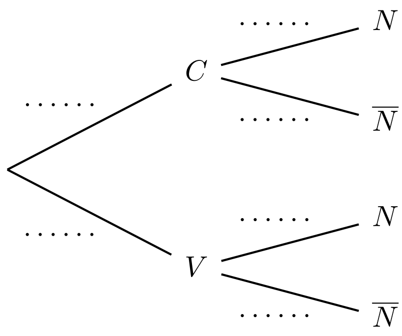
- chaque entraînement est composé d'un ou deux sports et commence toujours par une séance de course à pied ou de vélo ;
- lorsqu'il commence par une séance de course à pied, il enchaîne avec une séance de natation avec une probabilité de $0,4$;
- lorsqu'il commence par une séance de vélo, il enchaîne avec une séance de natation avec une probabilité de $0,8$.

Un jour d'entraînement, la probabilité que Fabien pratique une séance de vélo est de $0,3$.
On note :

- C l'évènement : « Fabien commence par une séance de course à pied » ;
- V l'évènement : « Fabien commence par une séance de vélo » ;

- N l'évènement : « Fabien enchaîne par une séance de natation ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant représentant la situation :



2. Quelle est la probabilité que Fabien commence par une séance de course à pied et enchaîne par une séance de natation ?
3. Démontrer que : $P(N) = 0,52$.
4. Sachant que Fabien n'a pas fait de séance de natation, quelle est la probabilité qu'il ait commencé son entraînement par une séance de vélo ?

Correction question 1 - 2

Correction question 3

Correction question 4

Exercice 5(Sujet E3C)

Une urne contient six jetons rouges dont un est marqué « gagnant ż et quatre jetons verts dont trois d'entre eux sont marqués « gagnant ż.

On tire au hasard un jeton de l'urne et on note les évènements :

R : « le jeton tiré est rouge ż,

V : « le jeton tiré est vert ż,

G : « le jeton tiré est gagnant ż.

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité de l'évènement « le jeton tiré est un jeton vert et marqué gagnant fż.
3. Soit $P(G)$ la probabilité de tirer un jeton gagnant. Montrer que $P(G) = \frac{2}{5}$.
4. Sachant que le jeton tiré est gagnant, calculer la probabilité qu'il soit de couleur rouge.
5. On tire maintenant, toujours au hasard et simultanément, deux jetons dans l'urne.
   Calculer la probabilité que les deux jetons soient marqués « gagnant ż.
   Expliquer votre démarche.

Correction