Fonctions dérivées

I Introduction et définition

Bilan du chapitre sur le nombre dérivé

On remarque quil y a un lien entre le signe du coefficient directeur des tangentes et les variations de la fonction f.

- Si la fonction est décroissante sur I alors le coefficient directeur des tangentes aux points dabscisse dans I est négatif.
- Si la fonction est croissante sur I alors le coefficient directeur des tangentes aux points dabscisse dans I est positif.

Vidéo de cours

Fonction dérivée ??

On voit donc que le signe du nombre dérivé est très important pour étudier les variations dune fonction. Mais nous n'allons pas nous amuser à calculer le nombre dérivée en tous les points de l'ensemble de définition car nous allons y passer trop temps.
Nous allons donc construire des fonctions qui à x associe le nombre dérivé de f en x.
On nommera cette fonction la fonction dérivée de f.

Définition : Fonction dérivable sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Lorsque pour tout réel x appartenant à I, f est dérivable en x, on dit que f est **dérivable** sur I.

Définition : Fonction dérivée

La fonction qui associe à tout réel x appartenant à I son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f sur l'intervalle I. Elle est notée f'.

Attention

Lensemble de définition de f nest pas toujours le même que l'ensemble de dérivabilité (ensemble de définition de f'.
Un exemple sera traité dans la suite du cours.

II Démonstration des dérivées des fonctions de référence

1 Dérivée de fonction affine

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Vidéo de cours

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ &= \frac{a(x_0+h)+b-ax_0-b}{h}\\ &= \frac{ah}{h}\\ &= a\end{aligned}$$

donc $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} a = a}$

Dérivée fonction affine

la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ est $f'(x) = a$

2 Dérivée de la fonction carré (démonstration fondamentale)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Calculons le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Vidéo de cours

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ &= \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}\\ &= \frac{x_0^2+2hx_0+h^2-x_0^2}{h}\\ &= \frac{2hx_0+h^2}{h}\\ &= 2x_0+h\end{aligned}$$

On en conclu que $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} 2x_0+h = 2x_0}$

Dérivée fonction carré

La fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$

3 Dérivée de la fonction inverse (démonstration fondamentale)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Calculons le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}^*$

Vidéo de cours

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\ &= \frac{\dfrac{1}{x_0+h}-\dfrac{1}{x_0}}{h}\\ &= \frac{\dfrac{x_0-x_0-h}{x_0^2+hx_0}}{h}\\ &= \frac{-h}{x_0^2+hx_0}\times\frac{1}{h}\\ &= \frac{-1}{x_0^2+hx_0}\end{aligned}$$

donc $\boxed{f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-1}{x_0^2+hx_0}=-\frac{1}{x_0^2}}$

Dérivée fonction inverse

La fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Dérivée de la fonction racine carrée

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}$. Calculons le nombre dérivé de f en $x_0\in\mathbb{R}^+$

Vidéo de cours

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}\\ &= \frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}\\ &= \frac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}\end{aligned}$$

donc $\boxed{f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}$

Dérivée de la fonction racine carrée

La fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}$ est $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Attention!!

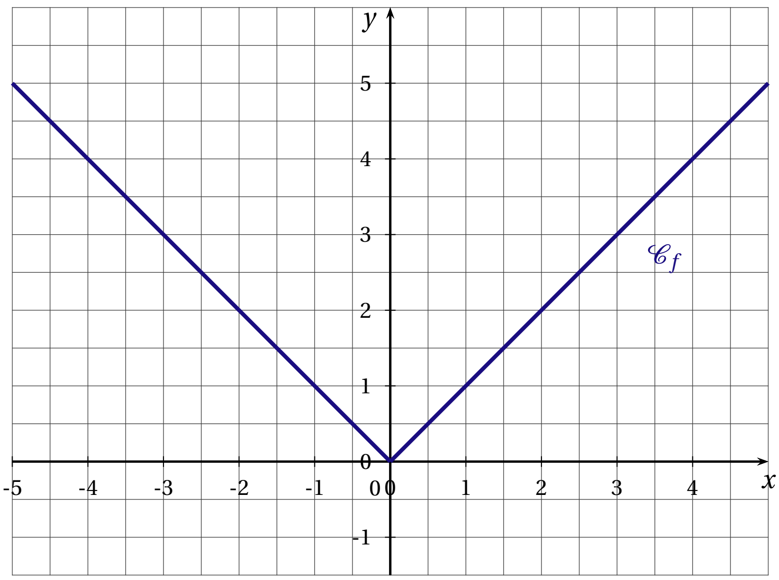
ici $f'(x)$ existe sur $\mathbb{R}_+^*$ alors que f existe sur $\mathbb{R}^+$
Le domaine de définition de f et celui de f' sont donc différents.

Dérivée de la fonction valeur absolue

Vidéo de cours

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f : x \mapsto |x|$. Est-elle dérivable sur D ?

Si on regarde la courbe représentative de la fonction f on voit qu'en 0, elle admet deux tangentes différentes. Elle ne semble pas dérivable en 0



Étudions la dérivabilité en $x = 0$:

Soit $h \neq 0 : \tau = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h|}{h}$

Il y a donc deux cas possibles :

- Si $h > 0$ alors $\tau = \dfrac{h}{h} = 1$ et donc $\lim_{h \to 0} \tau = \lim\limits_{h \to 0} 1 = 1$
- $h < 0$ alors $\tau = -1$ et donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau = \lim_{h \to 0} -1 = -1$

Il y a donc deux limites différentes, "*à gauche*" et "*à droite*" de zéro. f n'est donc pas dérivable en 0

Ca se voit !!

Graphiquement, on observe qu'une fonction n'est pas dérivable pour une valeur, quand la courbe change brutalement de direction, sans progressivité. Typiquement, quand la courbe "*forme un angle*".

S'évaluer

QCM 1

4 Récapitulatif des dérivées des fonctions de référence

Vidéo de cours

fonction définie et dérivable sur :	fonction f définie par :	fonction dérivée f' définie par :
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	a
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n \quad (n \text{ entier } n \geqslant 1)$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad (n \text{ entier } n \geqslant 1)$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$]0;+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Applications

Exercice 1

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$. Calculer $f'(x)$.

Correction :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5x^4$

Exercice 2

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Calculer $f'(x)$.

Correction :
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

S'évaluer/S'entraîner :

QCM 2

Exercices mathalea

5 Dérivées et opérations

Vidéo de cours

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Démonstration de la dérivée d'un produit (démonstration fondamentale)

Soit f la fonction définie sur I pat $f = u \times v$.
On cherche à calculer $f' = (u \times v)'$.
On sait que : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Commençons par calculer : $f(x+h) - f(x)$:
$f(x+h) - f(x) = u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x) \quad (1)$

Utilisons que $u(x+h) \times v(x) - u(x+h) \times v(x) = 0$ pour l'ajouter à l'égalité (1).

Astuce de renard!

On ajoute à l'expression une quantité à qui on soustrait elle même. Cela fait évidemment zéro. L'idée est d'utiliser ces deux termes pour avancer dans la démonstrations.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x) + u(x+h) \times v(x) - u(x+h) \times v(x) \\ &= u(x+h) \times v(x+h) - u(x+h) \times v(x) + u(x+h) \times v(x) - u(x) \times v(x) && \text{réorganisation des termes.} \\ &= u(x+h)\,[v(x+h) - v(x)] + v(x)[u(x+h) - u(x)] && \text{factorisation} \end{aligned}$$

Il vient alors :
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(x+h) \times (v(x+h) - v(x))}{h} + \frac{v(x)\,(u(x+h) - u(x))}{h}$$

et en passant à la limite :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\,(v(x+h) - v(x))}{h} + \frac{v(x)\,(u(x+h) - u(x))}{h}$$

On calcule séparément :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(x+h)\,(v(x+h) - v(x))}{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(x)\,(u(x+h) - u(x))}{h}$

On commence par : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(x+h)\,(v(x+h) - v(x))}{h}$

On sait que $\lim\limits_{h\to 0} u(x+h) = u(x)$ et que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x)$

donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(x+h)\,(v(x+h) - v(x))}{h} = u(x)v'(x)$

En procédant de même, on obtient que :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(x)\,(u(x+h) - u(x))}{h} = v(x) \times u'(x)$

Au final,
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = u(x)v'(x) + u'(x) \times v(x)$$

Vidéo de cours

Tableau récapitulatif

	fonction f définie par :	fonction dérivée f' :
Produit d'une fonction par un réel k	ku	ku'
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Produit	$u \times v$	$u'v + uv'$
Quotient ($v \neq 0$ sur I)	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Inverse ($v \neq 0$ sur I)	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$

EXEMPLES

EXERCICE 3

Vidéo de cours

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(2+\dfrac{x^2}{3}\right)\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$. Calculer $f'(x)$.

Correction :

Sur $]0;+\infty[$ f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.
$f=uv$ d'où $f'=u'v+uv'$. Avec pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$\begin{array}{lll} u(x)=2+\dfrac{x^2}{3} & \text{d'où} & u'(x)=\dfrac{2x}{3} \\ v(x)=1-\dfrac{2}{x} & \text{d'où} & v'(x)=\dfrac{2}{x^2} \end{array}$$

Soit pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{3}\times\left(1-\frac{2}{x}\right)+\frac{2}{x^2}\times\left(2+\frac{x^2}{3}\right) \\ &= \frac{2x}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{3} \\ &= \frac{2x^3-2x^2+6}{3x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f'(x)=\dfrac{2x^3-2x^2+6}{3x^2}$.

EXERCICE 4

Vidéo de cours

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$. Calculer $f'(x)$.

Correction :
Sur $\mathbb{R}$, f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.
$f=\dfrac{u}{v}$ d'où $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel x,

$$\begin{array}{lll} u(x)=4x-3 & \text{d'où} & u'(x)=4 \\ v(x)=x^2+1 & \text{d'où} & v'(x)=2x \end{array}$$

Soit pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x^2+1)-2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=\dfrac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}$.

S'ÉVALUER/S'ENTRAÎNER :

QCM 3

Exercices mathalea

III Dérivée et variations d'une fonction

Théorème :

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f est constante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) = 0$.
- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \leqslant 0$.

Vidéo de cours

Pratique !

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' la dérivée de f sur I.

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.

- Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

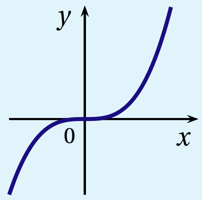
x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	*minimum*	↗	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	*maximum*	↘	

On n'oublie pas le changement de signe!!

Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

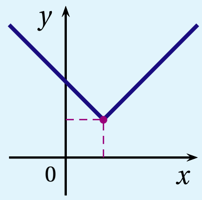
Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
$f'(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0.



Remarque :

Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-1|+1$.
f est une fonction affine par morceaux, f admet un minimum $f(1) = 1$ or f n'est pas dérivable en 1.



S'ÉVALUER

QCM 4

POINT MÉTHODE

Méthode :

En pratique, pour étudier les variations d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$:

- on détermine la dérivée f' de f ;
- on étudie le signe de f' sur $\mathscr{D}_f$;
- on applique le théorème 2 sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}_f$ où le signe de f' est constant ;
- on dresse le tableau des variations en indiquant les extremums, s'il y a lieu et éventuellement les limites aux bornes de son ensemble de définition.

EXERCICE 5

Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+5}{x-3}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

Vidéo de cours

Rédaction :

Calculons sa fonction dérivée en utilisant la forme $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

On note $u(x) = 2x^2+3x+5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
$v(x) = x-3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
Alors $u'(x) = 4x+3$ et $v'(x) = 1$
f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

et $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \dfrac{(4x+3)(x-3) - \left(2x^2+3x+5\right)(1)}{(x-3)^2} = \dfrac{2\left(x^2-6x-7\right)}{(x-3)^2}$

II faut donc étudier le signe de $x^2 - 6x - 7$ puisque $(x-3)^2$ est toujours positif.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(-7)(1) = 36 + 28 = 64 = 8^2$
donc $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles distinctes :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+8}{2} = 7$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-8}{2} = -1$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	-∞		-1		3		7		+∞
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	‖	$\searrow$	28.5	$\nearrow$	

$f(-1) = -1$ et $f(7) = 28,5$