Plan de Travail : Dérivation

I Calculs de dérivées

Formules de cours : Exercices 26 ; 28 p 119
Application aux équations de tangentes : exercice 25 p 119
Applications aux coefficients directeurs de tangentes : Exercices ** 34-35 p 120
Synthèse : Exercices 61 et 66 p 124

II Application de bases : lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction

Application directe : Exercices 20 ;21 ;22 ;23 p 143 et 28 p 144
Approche graphique :36-37 p 145 ; 38-39 p 146

III Études des variations

Applications de bases : Exercices 24 p 144 ; 35 p 145
Applications classiques : : Exercices 43 ; 44 ; 46 ; 47 ; 48 p 147
Applications plus complexes : Exercices 51 ;52 p 147 et 72 p 149

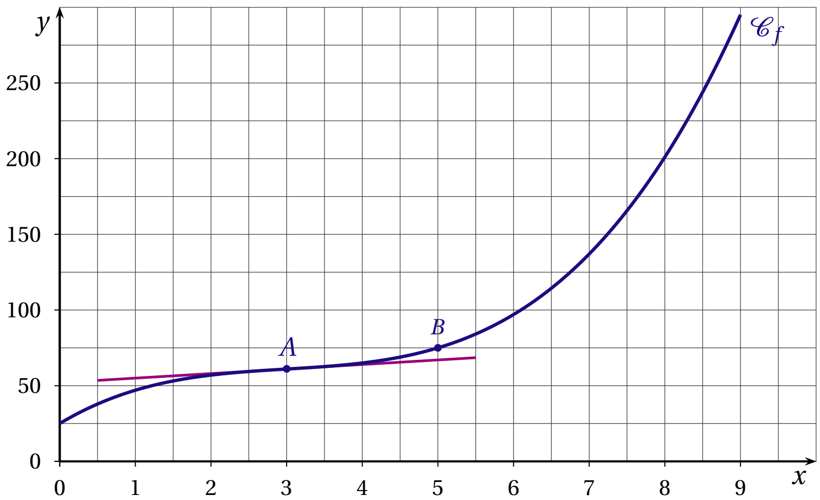
IV Extremums

Applications de bases : Exercices 57 et 58 p 148
Détermination calculatoires des extremums : Exercices 59 ; 61 et 63 p 148

V Modélisations

EXERCICE 1

La capacité de production mensuelle d'une entreprise est limitée à 9 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués. Le coût total de production $f(x)$, exprimé en milliers d'euros, est représenté par la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(3;61)$ est tracée sur le graphique.
La tangente au point $B(5;75)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère.



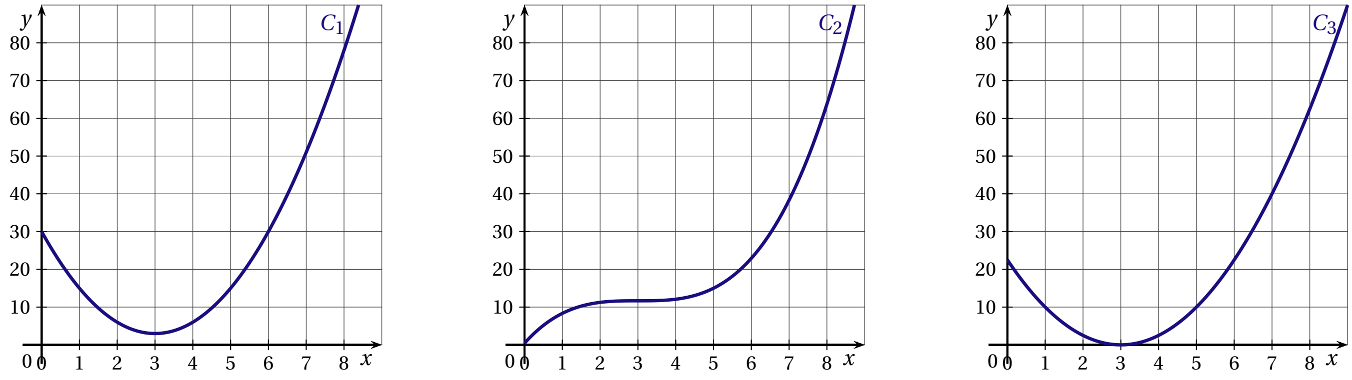
On admet que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;9]$ et, on note f' la fonction dérivée de la fonction f.

PARTIE A

Le coût marginal est assimilé sur l'intervalle $[0;9]$ à la dérivée du coût total de production.

1. À partir du graphique et des renseignements fournis déterminer la valeur du coût marginal pour $x = 5$.

2. Quelle est, parmi les trois courbes proposées ci-dessous, celle qui représente le coût marginal ?



PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 25$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.

PARTIE C

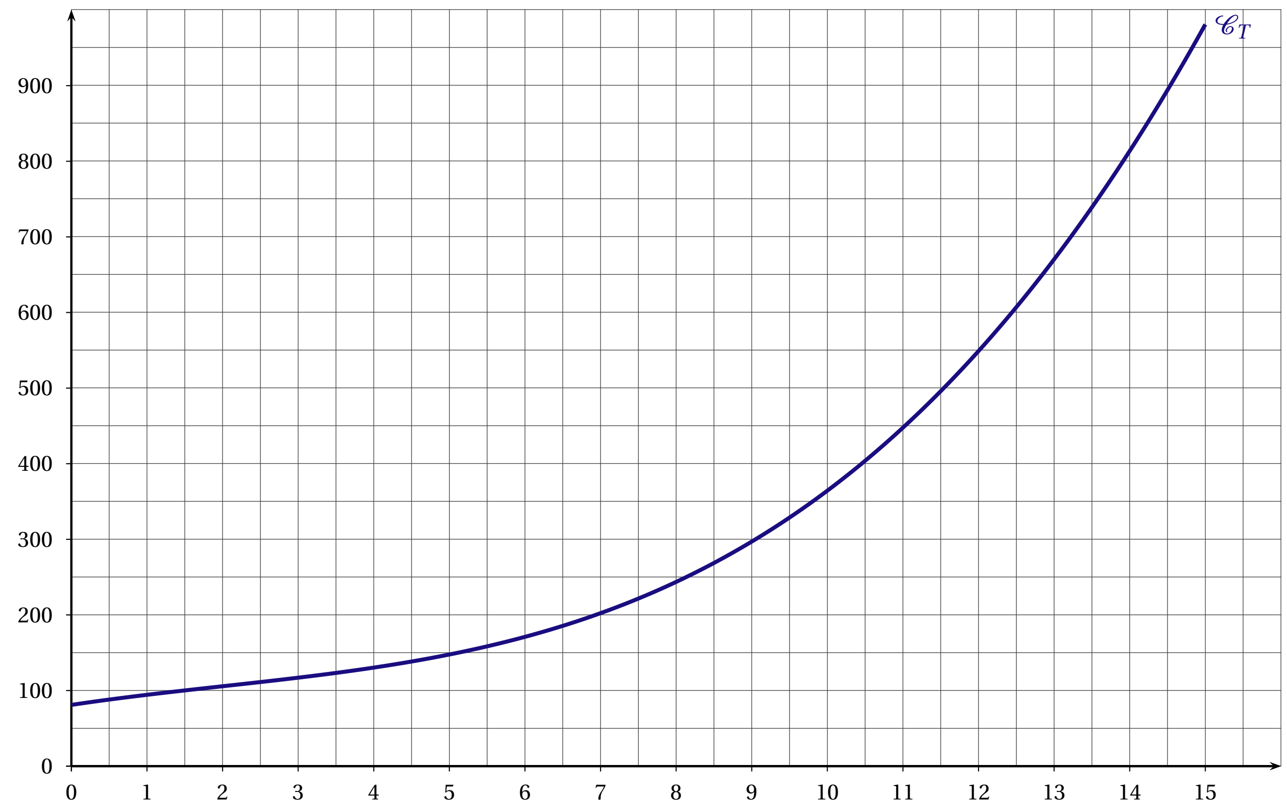
Le prix de vente d'un article est de 30 €. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise pour x milliers d'articles vendus est donné par $B(x) = 30x - f(x)$.

1. Pour quelle quantité d'articles vendus, le bénéfice est-il maximal ?
2. Déterminer les quantités commercialisées, arrondies à la centaine d'articles près, dégageant un bénéfice positif.

EXERCICE 2

Soit C la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;15]$ par $C(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 15x + 81$. La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.
La courbe $\mathscr{C}_T$ représentative de la fonction C est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal.
On suppose que chaque article produit est vendu au prix de 60 €.

1. On note $R(x)$ la recette générée par la production et la vente de x milliers d'articles.
   a) Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction recette.
   b) Déterminer graphiquement les valeurs arrondies au millier près des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.
2. Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer $B'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction B.
   c) En déduire la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
   Quel est le montant en euro de ce bénéfice maximal ?
3. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
   a) Sur le graphique ci-dessous, placer le point A sur la courbe $\mathscr{C}_T$ tel que la droite (OA) soit tangente à $\mathscr{C}_T$. On appelle a l'abscisse du point A.
   b) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $C_M(a)$.
   c) Par lecture graphique, conjecturer les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;15]$.



EXERCICE 3

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 10 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0;10]$ par

$$C(x) = x^3 + 12x^2 + 21x + 320$$

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.

PARTIE A

1. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C.
   Calculer $C'(4)$ et $C'(6)$.
2. Justifier que la fonction C est strictement croissante sur $[0;10]$.

PARTIE B

Chaque article est vendu 273 euros, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par

$$R(x) = 273x$$

1. a) Tracer sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction R.
   b) Par lecture graphique, déterminer la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6 000 articles un mois donné.
   b) On note B' la dérivée de la fonction B.
   Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;10]$ on a $B'(x) = -3x^2 - 24x + 252$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;10]$.
   d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal?

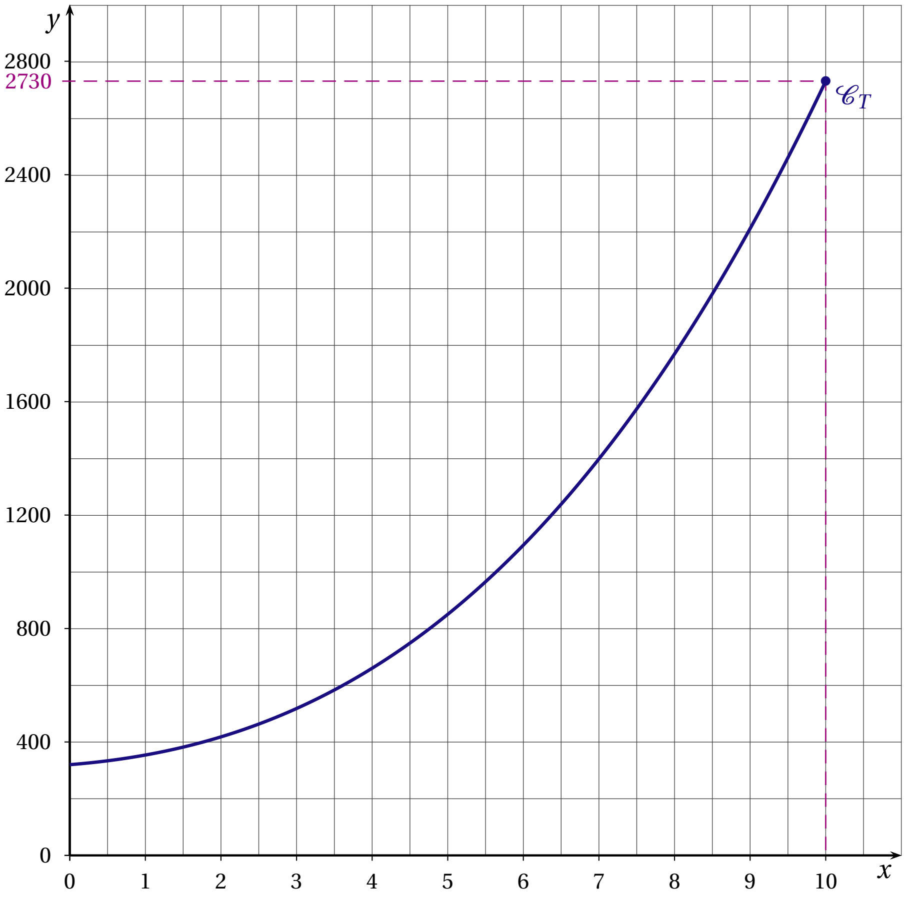
PARTIE C

On note $f(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.

f est définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $f(x) = \dfrac{x^3+12x^2+21x+320}{x}$.

1. Conjecturer graphiquement les variations du coût moyen de production sur l'intervalle $]0;10]$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$, et vérifier que $f'(x) = \dfrac{(x-4)(2x^2+20x+80)}{x^2}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;10]$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]0;10]$.
4. En dessous de quel prix de vente unitaire, l'entreprise est-elle sûre de ne faire aucun bénéfice ?

ANNEXE



Corrections plan de travail